

Übungen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Blatt 11 - Abgabe bis 26.6.2012

51. Es sei D eine offene Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Vektorraumes V und

$$\tilde{D} = \{(x, y) \in V \times V \mid [x, y] \subseteq D\}.$$

Zeigen Sie, dass \tilde{D} offen in $V \times V$ ist.

52. Bestimmen Sie jeweils $\partial_z f$ für den Parameter $z = 0$, wobei f die Lösung der folgenden Differentialgleichung mit Parameter z ist.

(a) $y' = y^2 + xzy^3, \quad f(0) = z + 1.$

(b) $y' = \frac{y}{x} + zxe^{-y}, \quad f(1) = 1.$

53. Bestimmen Sie $\partial_z x$ und $\partial_z y$ für den Parameter $z = 0$, wobei x und y die Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 4ty^2 \\ \dot{y} &= 1 + 5zx\end{aligned}$$

mit den Anfangswerten $x(0) = 0$ und $y(0) = 0$ sind.

54. Zeigen Sie, dass die durch

$$f(x, z) = \begin{cases} \sqrt{z} \tan(x\sqrt{z}) & \text{für } z \geq 0 \\ -\sqrt{-z} \tanh(x\sqrt{-z}) & \text{für } z < 0 \end{cases}$$

definierte Funktion $f : \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 z < \frac{\pi^2}{4}\} \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar ist, und bestimmen Sie $\partial_z f(x, 0)$. (Hinweis: Präsenzaufgabe 39.)

- 55.* Es seien V, W endlichdimensionale Vektorräume und F eine stetige Funktion auf einer offenen Teilmenge D von $\mathbb{R} \times V \times W$, die k Mal nach x und l Mal nach (y, z) stetig differenzierbar ist, wobei $k \leq l$ und $l \geq 1$. Weiter sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und f die maximale Lösung der Differentialgleichung

$$y' = F(x, y, z)$$

mit dem Anfangswert $f(x_0) = y$. Zeigen Sie, dass f $k + 1$ Mal nach x und l Mal nach (y, z) stetig differenzierbar ist.