Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann SS 2012

Übungen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Blatt 12 - Abgabe bis 3.7.2012

56. Untersuchen Sie die Nulllösungen der beiden folgenden Differentialgleichungssysteme auf Stabilität.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + y + x\sin y \\ \dot{y} &= -2x + y + 1 - \cos xy \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= \sin x + \sin y \\ \dot{y} &= 2x + 4y - xy \end{aligned}$$

57. Es sei q eine stetig differenzierbare positive monoton wachsende Funktion auf $[a, \infty[$. Zeigen Sie, dass die Nulllösung der Differentialgleichung

$$y'' + q(x)y = 0$$

stabil ist.

58. Es sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $F(0,0) = 0$. Man zeige:

(a) Die Nullösung ist die einzige konstante Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - xF(x,y) \\ \dot{y} &= -x - yF(x,y) \end{aligned}$$

(b) Es gibt eine Umgebung U des Nullpunktes in $\mathbb{R}^2$, so dass die Nulllösung
- stabil ist, wenn F auf U nichtnegativ ist,
- asymptotisch stabil ist, wenn F auf $U \setminus \{0\}$ positiv ist,
- instabil ist, wenn F auf $U \setminus \{0\}$ negativ ist.

59. Stellen Sie fest, ob für alle Nullstellen des Polynoms

$$p(\lambda) = \lambda^5 + 9\lambda^3 + 6\lambda + 3$$

gilt $\operatorname{Re}\lambda < 0$.

60.* Zeigen Sie, dass die Nulllösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2y^5 - x^5 \\ \dot{y} &= y^2(y - 2x) \end{aligned}$$

attraktiv, aber nicht stabil ist.