

Übungen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Blatt 3 - Abgabe bis 24.4.2012

11. Drücken Sie die Picard-Iterierten für die Differentialgleichung

$$y' = a(x)y$$

und die Anfangsbedingung $f(0) = y_0$ durch die Stammfunktion F der gegebenen stetigen Funktion a auf einem Intervall I aus. Beginnen Sie mit $f_0(x) = y_0$.

12. Bestimmen Sie die Picard-Iterierten für das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

und die Anfangsbedingung $f(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, beginnend mit $f_0(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

13. Zeigen Sie, dass die durch

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{x}, & \text{falls } |y| < x^2, \\ x \operatorname{sgn} y, & \text{falls } |y| \geq x^2 \end{cases}$$

gegebene Funktion $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist. Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = F(x, y).$$

14. Es sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$ eine maximale Lösung der Differentialgleichung

$$y' = F(x, y),$$

wobei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und beziglich y lokal Lipschitz-stetig ist. Zeigen Sie, dass wenigstens eine der folgenden Aussagen zutrifft.

- (a) $b = \infty$.
- (b) $\overline{\lim}_{x \rightarrow b} \|f(x)\| = \infty$.
- (c) $\underline{\lim}_{x \rightarrow b} d((x, f(x)), \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \setminus D) = 0$.

- 15.* Es seien X und Y metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Angenommen, es gibt abgeschlossene Teilmengen A und B von X , so dass $X = A \cup B$ ist und die Einschränkungen $f|_A$ und $f|_B$ stetig sind. Zeigen Sie, dass f stetig ist.