Universität Bielefeld SS 2012
Prof. W. Hoffmann

Übungen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Blatt 4 - Abgabe bis 8.5.2012

16. Bestimmen Sie auf dem Intervall $]0,\infty[$ die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$y_1' = 1 - \frac{y_2}{x},$$
$$y_2' = \frac{y_1}{x} - 1.$$

Hinweis: Nehmen Sie die Substitution $x = e^t$ vor.

17. Es sei A eine periodische stetige Funktion auf $\mathbb{R}$ mit Werten im Raum der $n \times n$-Matrizen und mit der Periode T. Weiter sei G die Fundamentalmatrix des Differentialgleichungssystems

$$y' = Ay$$

mit $G(0) = I$. Man zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $G(x+T) = G(x)G(T)$.

18. Bestimmen Sie ein Lösungsfundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= -\frac{y_1}{x(x^2+1)} + 2xy_2, \\ y_2' &= \quad \frac{y_1}{x(x^2+1)} - \frac{y_2}{x} \end{aligned}$$

auf dem Intervall $]0,\infty[$.
Hinweis: Prüfen Sie nach, ob es eine Lösung gibt, die proportional zum Vektor $\binom{x^2}{1}$ ist.

19. Es sei I ein Intervall und V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Weiter seien A, B und G stetige Funktionen auf I mit Werten in $\mathrm{End}(V)$, wobei G stetig differenzierbar ist und für $x \in I$ gilt

$$G'(x) = A(x)G(x)B(x).$$

Zeigen Sie, dass dann für $x \in I$ gilt

$$(\det G(x))' = \det G(x)\,\mathrm{tr}\big(A(x)G(x)B(x)G(x)^{-1}\big).$$

b.w.

20.* Finden Sie ein Lösungsfundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= \left(1 + \tfrac{1}{x} - xe^x\right) y_1 - e^x y_2 + xe^x y_3 \\ y_2' &= -y_1 + \left(x - \tfrac{1}{x}\right) y_2 + (1 - e^{-x}) y_3 \\ y_3' &= -xe^x y_1 + (x + x^2) e^x y_2 + x(e^x - 1) y_3 \end{aligned}$$

Hinweis: Prüfen Sie, ob $\begin{pmatrix} e^x \\ \frac{1}{x} \\ e^x \end{pmatrix}$ eine Lösung ist.