

Übungen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Blatt 5 - Abgabe bis 15.5.2012

21. Zeigen Sie, dass es in einem nichtleeren kompakten metrischen Raum eine dichte abzählbare Teilmenge gibt. (Wir betrachten auch endliche Mengen als abzählbar.)
22. Es sei X ein metrischer Raum und A eine Teilmenge von X derart, dass jede Folge in A einen Häufungspunkt in X besitzt. Zeigen Sie, dass der Abschluss von A folgenkompakt ist.
23. Es seien X, Y und Z metrische Räume sowie $M \subseteq C(X, Y)$ und $N \subseteq C(Y, Z)$ gleichgradig stetige Mengen von Abbildungen. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{g \circ f \mid f \in M, g \in N\}$$

gleichgradig stetig ist.

24. Zeigen Sie, dass die Menge der stetigen Funktionen $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ nicht kompakt im metrischen Raum $C([0, 1])$ ist.
- 25.* Zeigen Sie die Umkehrung des Satzes von Arzelà-Ascoli: Ist X ein kompakter metrischer Raum, V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und M eine präkompakte Teilmenge von $C(X, V)$, so ist M beschränkt und gleichgradig stetig.