Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann

SS 2012

Übungen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Blatt 6 - Abgabe bis 22.5.2012

26. Finden Sie die Lösungen f folgender Differentialgleichungen, die den angegebenen Anfangsbedingungen genügen.

(a) $$y'' = \frac{1 + y'^2}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad f(0) = -1, \quad f'(0) = 0.$$

(b) $$y'' = x(y' - 1)e^{y'}, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1.$$

27. Finden Sie die Lösungen f folgender Differentialgleichungen, die den angegebenen Anfangsbedingungen genügen.

(a) $$y'' = \frac{y'}{\sin^2 y}, \quad f(0) = \frac{\pi}{4}, \quad f'(0) = -1.$$

(b) $$y'' = y' + \frac{y'^2}{y}, \quad f(0) = f'(0) = e.$$

28. Es sei F eine stetige Funktion auf einem Intervall I und $(t_0, x_0, x_1) \in \mathbb{R} \times I \times \mathbb{R}$. Zeigen sie, dass das Anfangswertproblem

$$\ddot{x} = F(x), \quad x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = x_1$$

in folgenden Fällen lokal eindeutig lösbar ist:

(a) $x_1 \neq 0$,

(b) $x_1 = 0$, $F(x_0) \neq 0$,

(c) $x_1 = 0$, $F(x_0) = 0$, $\operatorname{sgn} F(x) = -\operatorname{sgn}(x - x_0)$ für x in einer Umgebung von x_0.

29. Finden sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{1 + x^2}y = 0$$

auf dem Intervall $[0, \infty[$. Hinweis: Suchen Sie zunächst nach einer polynomialen Lösung zweiten Grades.

b.w.

30.* Es seien $A_0, \ldots, A_{k-1}$ stetige Funktionen auf einem Intervall I mit Werten im Raum der $n \times n$-Matrizen und G eine invertierbare $n \times n$-Matrix, deren Spalten g_i Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$y^{(k)} + A_{k-1} y^{(k-1)} + \ldots + A_1(x) y' + A_0(x) y = 0$$

sind. Weiter seien $p_1, \ldots, p_{n(k-1)}$ Funktionen auf I mit Werten in $\mathbb{R}^n$, so dass die Funktionen g_i für $1 \leq i \leq n$ zusammen mit den Funktionen Gp_j für $1 \leq j \leq n(k-1)$ ein Lösungs-Fundamentalsystem bilden. Es sei W die zugehörige Wronski-Matrix und $\tilde{W}$ die Wronski-Matrix der Funktionen p_1', $\ldots$, $p_{n(k-1)}'$. Zeigen Sie, dass für alle $x \in I$ gilt

$$\det W(x) = \det G(x)^n \det \tilde{W}(x).$$