Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann SS 2012

Übungen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Blatt 8 - Abgabe bis 5.6.2012

36. Finden Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems
$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + y - 2z\\ \dot{y} &= 4x + y + 2e^t\\ \dot{z} &= 2x + y - z + e^t\end{aligned}$$

37. Finden Sie die allgemeine reelle Lösung des Differentialgleichungssystems
$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + e^t \sin t\\ \dot{y} &= 2x + y - 2z\\ \dot{z} &= 3x + 2y + z\end{aligned}$$

38. Es seien a, b, c und d komplexe Zahlen. Wir setzen $D = ad - bc$, $t = \frac{a+d}{2}$ und $\Delta = t^2 - D$. Zeigen Sie, dass
$$\exp\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} = e^t\left(\cosh\big(\sqrt{\Delta}\,\big)I + \frac{\sinh\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}}(A - tI)\right),$$
wobei der Wert von $\sqrt{\Delta}$ einheitlich gewählt und die Funktion $s \mapsto \frac{\sinh s}{s}$ stetig auf ganz $\mathbb{C}$ fortgesetzt ist.
(Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall von Diagonalmatrizen.)

39. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller oder komplexer Vektorraum und $A_0, \ldots, A_{k-1} \in \operatorname{End}(V)$. Zeigen Sie, dass
$$\det(\lambda^k I_V + \lambda^{k-1}A_{k-1} + \ldots + \lambda A_1 + A_0) = \det(\lambda I_{V^k} - \tilde{A}),$$
wobei
$$\tilde{y}' = \tilde{A}\tilde{y}$$
das Differentialgleichungssystem erster Ordnung ist, das man durch die übliche Reduktion aus dem dem Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten
$$y^{(k)} + A_{k-1}y^{(k-1)} + \cdots + A_1 y' + A_0 y = 0$$
erhält.

40.* In den Bezeichnungen von Aufgabe 39 sei V ein komplexer Vektorraum. Zeigen Sie, dass die die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes von $\tilde{A}$ nicht größer als die Dimension von V ist.