

Übungen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Blatt 9 - Abgabe bis 12.6.2012

41. Finden Sie eine Matrix B , so dass

$$\exp B = \begin{pmatrix} 5 + i\sqrt{3} & 4 \\ -9 & -7 + i\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

42. Es seien a_0 und a_1 stetige Funktionen mit der Periode T . Zeigen Sie, dass eine komplexe Zahl μ existiert, so dass die Differentialgleichung

$$y'' + (a_1(x) + 2\mu)y' + (a_0(x) + \mu a_1(x) + \mu^2)y = 0$$

eine periodische Lösung mit der Periode T besitzt.

Hinweis: Betrachten Sie $e^{\mu x}y$.

43. Die Funktion q sei auf $[a, \infty[$ stetig mit $q(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$. Zeigen Sie, dass jede nichttriviale Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + q(x)y = 0$$

unendlich viele Nullstellen $a_1 < a_2 < \dots$ hat und dass $a_{i+1} - a_i \rightarrow 0$ für $i \rightarrow \infty$.

44. Die Funktion q sei stetig und negativ auf dem Intervall I . Zeigen sie, dass jede nichttriviale Lösung der Differentialgleichung aus der vorigen Aufgabe höchstens eine Nullstelle auf I hat.

- 45.* Es sei a eine gerade stetige Funktion mit der Periode T und W die Wronski-Matrix der Differentialgleichung

$$y'' + a(x)y = 0$$

mit dem Anfangswert $W(0) = I$. Weiter sei $C = W(T)$. Zeigen Sie, dass $\det C = 1$ ist und dass die Diagonaleinträge von C gleich sind.