

Erste Klausur Gewöhnliche Differentialgleichungen

1. Finden Sie die Lösung f der Differentialgleichung

$$y'' = \frac{\cos^2 y'}{2\sqrt{x}}$$

mit den Anfangswerten $f(1) = \frac{\pi}{2}$ und $f'(1) = \frac{\pi}{4}$. Hinweis: Substitution, partielle Integration.

2. Definieren Sie den Begriff der gleichgradigen Stetigkeit. Stellen Sie in jedem der folgenden Fälle fest, ob die Menge $\{f_1, f_2, f_3, \dots\}$ von Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichgradig stetig ist:

- (a) $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$,
(b) $f_n(x) = x + n$.

Begründen Sie Ihre Entscheidung.

3. Finden Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{1}{2} \left(\frac{y_1}{x+1} + \frac{y_2}{x-1} + 1 \right) \\ y_2' &= \frac{1}{2} \left(\frac{y_1}{x-1} + \frac{y_2}{x+1} + 1 \right) \end{aligned}$$

auf dem Intervall $] -1, 1[$.

Hinweise: Stellen Sie fest, ob das zugehörige homogene System Lösungen mit der Eigenschaft $y_1 = \pm y_2$ hat. Bei einer der Fundamentallösungen ist es einfacher, zunächst die Umkehrfunktion zu bestimmen. Die Determinante der Fundamentalmatrix genügt einer einfachen Differentialgleichung.

4. Es sei f die Lösung der Differentialgleichung

$$y' = y^2 + e^{2zx}$$

mit dem Anfangswert $f(0) = 0$. Bestimmen Sie die Ableitung $\partial_z f$ für den Parameter $z = 0$.