

## Präsenzübungen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

### Blatt 12 – Woche vom 27.6.-3.7.2012

45. Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $D$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R} \times V$  und  $F : D \rightarrow V$  stetig sowie bezüglich  $y$  lokal Lipschitz-stetig. Es sei  $x_0 \in \mathbb{R}$  und  $f_y$  die maximale Lösung der Differentialgleichung  $y' = F(x, y)$  mit dem Anfangswert  $f_y(x_0) = y$ . Zeigen Sie, dass die Menge der  $y \in V$ , für die  $f_y$  existiert und attraktiv ist, eine offene Teilmenge von  $V$  ist.

46. Finden Sie alle konstanten Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x} = \sin x + \sin y$$

$$\dot{y} = \sin x - \sin y$$

und untersuchen sie ihre Stabilität.

47. Finden Sie eine Ljapunow-Funktion der Form  $E(x, y) = ax^4 + by^4$  für das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = -x^5 - y^5$$

$$\dot{y} = 3x^3 - y^3$$

48. Es seien  $a_1, \dots, a_n$  reelle Zahlen und

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums, dass genau dann für alle Nullstellen  $\lambda$  von  $p$  gilt  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ , wenn

- im Fall  $n = 1$  gilt  $a_1 > 0$ ,
- im Fall  $n = 2$  gilt  $a_1 > 0, a_2 > 0$ ,
- im Fall  $n = 3$  gilt  $a_1 > 0, a_3 > 0, a_1a_2 > a_3$ ,
- im Fall  $n = 4$  gilt  $a_1 > 0, a_4 > 0, a_1a_2 > a_3, a_3(a_1a_2 - a_3) > a_1^2a_4$ .