Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann SS 2012

Präsenzübungen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Blatt 6 – Woche vom 16.-22.5.2012

21. Es sei W die Wronski-Matrix eines Lösungs-Fundamentalsystems des homogenen linearen Differentialgleichungssystems
$$y^{(k)} + A_{k-1}(x)y^{(k-1)} + \ldots + A_1(x)y' + A_0(x)y = 0,$$
wobei die A_j stetige Funktionen auf einem Intervall mit Werten im Raum der $n \times n$-Matrizen sind. Zeigen Sie, dass
$$(\det W)' + \operatorname{tr} A_{k-1} \det W = 0.$$

22. Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung
$$\ddot{x} = \sqrt{|x|}$$
mit den Anfangswerten
$$x(0) = \dot{x}(0) = 0,$$
die für $t > 0$ oder $t < 0$ die Form $x(t) = ct^a$ haben. Zeigen Sie, dass Sie alle Lösungen gefunden haben.

23. Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung
$$y'' + \frac{y'^2}{y} = 0$$
mit der Eigenschaft $y > 0$.

24. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, I ein Intervall und k eine natürliche Zahl. Weiter sei $F : I \times V \times V \to V$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass für beliebige Funktionen $f,\ g \in C^1(I, V)$, Zahlen $c \in \mathbb{R}$ und $x \in I$ gilt
$$F(x, f(x) + g(x), f'(x) + g'(x)) = F(x, f(x), f'(x)) + F(x, g(x), g'(x)),$$
$$F(x, cf(x), cf'(x)) = F(x, f(x), f'(x)).$$
Zeigen Sie, dass dann für jedes $x_0 \in I$ die durch
$$(y_0, y_1) \mapsto F(x_0, y_0, y_1)$$
gegebene Abbildung $V \oplus V \to V$ linear ist.