Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann SS 2010

Übungen zu Quadratischen Formen

Blatt 10 - Abgabe bis 30.6.2010

46. Es sei U der durch die ersten beiden Spalten und W der durch die letzten beiden Spalten der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Unterraum von $\mathbf{Q}^4$. Es sei p die Projektion von $\mathbf{Q}^4$ längs U auf W, betrachtet als lineare Abbildung $\mathbf{Q}^4 \to \mathbf{Q}^4$. Finden Sie die Matrix von p bezüglich der Standardbasis von $\mathbf{Q}^4$.

47. Prüfen Sie nach, dass die lineare Abbildung $r_\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

dargestellt wird, für jede reelle Zahl φ eine Isometrie bezüglich des Standard-Skalarprodukts b ist. Zeigen Sie, dass $r_\varphi \circ r_\psi = r_{\varphi+\psi}$.

48. In den Bezeichnungen der vorigen Aufgabe sei $s_\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ die durch

$$s_\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2b(\mathbf{x}, \mathbf{v}_\varphi)\mathbf{v}_\varphi \qquad \text{mit} \qquad \mathbf{v}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

gegebene Spiegelung.

Durch welche Matrix wird s_φ dargestellt? Zeigen Sie, dass $s_\varphi \circ s_\psi = r_{2(\varphi-\psi)}$.

49. Zeigen Sie, dass zwei quadratische Formen über den reellen Zahlen genau dann äquivalent sind, wenn sie die gleiche Signatur haben.

50.* Zeigen Sie, dass die Punkte P, Q, R und S eines Euklidischen Raumes genau dann ein Parallelogramm mit den Diagonalen PS und QR bilden, wenn

$$d(P,S)^2 + d(Q,R)^2 = d(P,Q)^2 + d(P,R)^2 + d(Q,S)^2 + d(R,S)^2.$$