Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann SS 2010

Übungen zu Quadratischen Formen

Blatt 11 - Abgabe bis 7.7.2010

51. Zeigen Sie, dass alle zerfallenden Bilinearformen auf zweidimensionalen Vektorräumen äquivalent sind.

52. Es sei b eine symmetrische Bilinearform auf einem reellen Vektorraum V mit der Signatur $(5, 2, 0)$. Welche der folgenden Signaturen können bei Einschränkungen von b auf Unterräume vorkommen?

$$(4, 1, 1), \qquad (3, 2, 1), \qquad (3, 0, 2), \qquad (4, 0, 2).$$

Geben Sie jeweils ein Beispiel an oder begründen Sie, warum eine Signatur nicht vorkommen kann.

53. Entscheiden Sie mit Hilfe von Aufgabe 15, welche der folgenden quadratischen Formen auf $\mathbf{Q}^2$ zerfällt.

$$x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2, \qquad 2x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2.$$

Geben Sie, wenn eine Form zerfällt, zwei linear unabhängige isotrope Vektoren an.

54. Finden Sie den Index und den anisotropen Kern der symmetrischen Bilinearform

$$x_1y_1 + 11x_2y_2 - 5x_3y_3$$

auf $\mathbf{Q}^3$.

Hinweis: Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^\top$ ist isotrop.

55.* Es sei b eine symmetrische Bilinearform auf einem reellen Vektorraum V mit der Signatur (i, j, k), und es seien i', j' und k' natürliche Zahlen. Zeigen Sie, dass es genau dann einen Unterraum gibt, so dass die Einschränkung von b die Signatur (i', j', k') hat, wenn gilt

$$i' \leq i, \qquad i' + k' \leq i + k, \qquad j' \leq j, \qquad j' + k' \leq j + k.$$