

## Übungen zu Quadratischen Formen

### Blatt 3 - Abgabe bis 5.5.2010

11. Diagonalisieren Sie die quadratischen Formen

$$3x_1^2 - x_1x_2 + 6x_1x_3 - \frac{1}{4}x_2^2 + x_2x_3 + 2x_3^2, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

durch umkehrbare lineare Substitutionen mit rationalen Koeffizienten. Geben Sie jeweils die Substitution und die umgekehrte Substitution an.

12. Diagonalisieren Sie die quadratische Form

$$x_1^2 - \sqrt{2}x_1x_2 + x_2^2 + 3x_2x_3 - \frac{1}{2}x_3^2$$

durch umkehrbare lineare Substitutionen mit reellen Koeffizienten, so dass in der entstehenden Form nur noch die Koeffizienten 0, 1 und  $-1$  vorkommen. Geben Sie die Substitution und die umgekehrte Substitution an.

13. Diagonalisieren Sie die quadratische Form

$$x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 + x_2x_3$$

mit Koeffizienten im Körper  $\{r, s, t\}$  aus der Präsenzaufgabe 2 durch umkehrbare lineare Substitutionen.

Hinweis: Es gilt  $-x = tx$ .

14. Es seien  $R$  und  $S$  Ringe. Wir definieren Operationen auf geordneten Paaren:

$$(a, d) + (b, e) = (a + b, d + e), \quad (a, d) \cdot (b, e) = (a \cdot b, d \cdot e)$$

für  $a \in R, b \in R, d \in S$  und  $e \in S$ . Zeigen Sie, dass das Kreuzprodukt  $R \times S$  mit diesen Operationen ein Ring ist. Unter welchen Bedingungen ist es ein Körper?

- 15.\* Es seien  $a, b$  und  $c$  rationale Zahlen, wobei  $a \neq 0$ . Zeigen Sie, dass die quadratische Form  $ax^2 + bxy + cy^2$  genau dann in ein Produkt von zwei Linearformen mit rationalen Koeffizienten zerfällt, wenn die quadratische Gleichung  $ax^2 + bx + c = 0$  eine rationale Lösung hat.