

Übungen zu Quadratischen Formen

Blatt 4 - Abgabe bis 12.5.2010

16. Gegeben sei ein reguläres Oktaeder mit den Ecken A, B, C, A', B', C' , wobei jeweils die mit dem gleichen Buchstaben bezeichneten Punkte nicht durch eine Kante verbunden sind. Wir betrachten die Verschiebungen

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \overrightarrow{AB}, & \mathbf{v}_2 &= \overrightarrow{AB'}, & \mathbf{v}_3 &= \overrightarrow{AC}, \\ \mathbf{w}_1 &= \overrightarrow{AA'}, & \mathbf{w}_2 &= \overrightarrow{BC}, & \mathbf{w}_3 &= \overrightarrow{AC'}. \end{aligned}$$

Drücken Sie die Vektoren $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ durch die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ aus und umgekehrt.

17. Stellen Sie fest, welche der folgenden symmetrischen Bilinearformen mit Koeffizienten im Körper $\{g, u\}$ ausgeartet sind.

$$x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2, \quad x_1y_2 + x_2y_1.$$

18. Für welche reellen Werte des Parameters a ist die symmetrische Bilinearform mit der folgenden Spezialisierung ausgeartet, positiv/negativ definit bzw. indefinit?

$$x_1^2 + ax_1x_2 + x_2^2$$

19. Auf einem reellen Vektorraum mit der Basis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sei eine symmetrische Bilinearform b durch die Werte

$$\begin{aligned} b(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) &= 3, & b(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2) &= -\frac{1}{4}, & b(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3) &= 2, \\ b(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) &= -\frac{1}{2}, & b(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) &= 3, & b(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

gegeben. Finden Sie eine Orthogonalbasis für b .

- 20.* Zeigen Sie, dass die folgenden Moduln über dem Ring \mathbb{Z} der ganzen Zahlen nicht frei sind.

- Der Modul $\{g, u\}$ mit der Skalarmultiplikation $a \cdot x = h(a) \cdot x$ für $a \in \mathbb{Z}$ und $x \in \{g, u\}$, wobei der Homomorphismus $h : \mathbb{Z} \rightarrow \{g, u\}$ in Abschnitt 2 der Vorlesung definiert wurde;
- Der Modul \mathbb{Q} der rationalen Zahlen.