Universität Bielefeld SS 2010
Prof. W. Hoffmann

Übungen zu Quadratischen Formen

Blatt 5 - Abgabe bis 19.5.2010

21. Entscheiden Sie für jede der folgenden Gleichungen, was für eine Kurve sie definiert. Finden sie ihren Mittelpunkt, falls er existiert.

(a) $$x_1^2 + 6x_1x_2 + 8x_2^2 + 2x_1 + 3x_2 + 1 = 0$$

(b) $$x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2 + 2x_1 + 3x_2 + 1 = 0$$

22. Entscheiden Sie, was für eine Fläche die Gleichung

$$x_1^2 - 5x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2^2 - 4x_2x_3 + x_3^2 + 2x_1 - 3x_2 - 4 = 0$$

definiert. Finden sie ihren Mittelpunkt, falls er existiert.

23. Entscheiden Sie, was für eine Schnittkurve die Fläche aus der vorangehenden Aufgabe mit der durch

$$3x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3 = 0$$

definierten Ebene hat. (Hinweis: Man kann diese Ebene zum Beispiel durch $x_1 = t_1 + 2t_2 + 1$, $x_2 = t_1$, $x_3 = t_1 - 3t_2$ parametrisieren.)

24. Es sei b eine nichtausgeartete symmetrische Bilinearform auf dem Vektorraum V und q ihre Spezialisierung. Weiter sei $X \subset V$ die Lösungsmenge der Gleichung $q(\mathbf{x}) = 1$. Zeigen Sie, dass für $\mathbf{x} \in X$ und $\mathbf{y} \in V$ mit der Eigenschaft $q(\mathbf{y}) \neq 0$ die Gerade

$$\{\mathbf{x} + t\mathbf{y} \mid t \in K\}$$

genau dann einen einzigen Punkt mit X gemeinsam hat, wenn $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ ist.

25.* Es seien b_1 und b_2 positiv definite symmetrische Bilinearformen auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V und q_1, q_2 die Spezialisierungen von b_1 und b_2. Zeigen Sie, dass es eine positive Zahl c gibt, so dass für alle $\mathbf{x} \in V$ gilt

$$q_1(\mathbf{x}) \leq c\, q_2(\mathbf{x})$$