

Übungen zu Quadratischen Formen

Blatt 9 - Abgabe bis 23.6.2010

41. Zeigen Sie, dass Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ eines Vektorraums genau dann linear unabhängig sind, wenn keiner dieser Vektoren von den übrigen linear abhängig ist.

42. Finden Sie eine Basis für den von den Spalten der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

erzeugten Unterraum von \mathbf{Q}^4 .

43. Auf \mathbf{Q}^4 sei eine Bilinearform durch ihre Gramsche Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

gegeben. Finden Sie eine Basis für das Orthogonalkomplement des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

erzeugten Unterraums.

44. Es sei b eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf einem Vektorraum V und $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ eine Basis von V . Zeigen Sie, dass es eine eindeutig bestimmte Basis $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ mit der Eigenschaft gibt, dass $b(\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_j) = 0$ für $i \neq j$ und $b(\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i) = 1$ für alle i .

(Hinweis: Betrachten Sie den von allen Basisvektoren außer \mathbf{v}_i erzeugten Unterraum V_i und sein Orthogonalkomplement W_i .)

45.* In der Situation von Aufgabe 44 sei V ein reeller Vektorraum und b positiv definit. Zeigen Sie: Wenn für alle $i \neq j$ gilt $b(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) \leq 0$, so gilt für alle $i \neq j$, dass $b(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j) \geq 0$.