

## Übungen zu Zählen und Zahlbereiche

### Blatt 10 - Abgabe bis 23.12.2010

46. Beweisen Sie durch vollständige Induktion für alle natürlichen Zahlen  $n$

$$3 \sum_{k=1}^n k(k+1) = n(n+1)(n+2).$$

47. Beweisen Sie folgende Aussage: Ist  $m$  eine natürliche Zahl und sind  $c, d$  ganze Zahlen derart, dass  $c \leq d$ , dann ist  $m \cdot c \leq m \cdot d$ .

Belegen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass sich Satz 21(ii) der Vorlesung nicht auf ganze Zahlen übertragen lässt.

48. Beweisen Sie folgende Aussage: Für jede ganze Zahl  $a$  und jede natürliche Zahl  $n \neq 0$  gibt es eine ganze Zahl  $q$  und eine natürliche Zahl  $r$ , so dass

$$a = q \cdot n + r, \quad r < n.$$

Hinweis: Ist  $a = k - l$  für natürliche Zahlen  $k$  und  $l$ , finden Sie eine natürliche Zahl  $m$ , so dass  $a = m - l \cdot n$ , und wenden Sie Satz 30 auf  $m$  und  $n$  an.

49. Es sei  $(k, l) \sim (k', l')$  und  $(m, n) \sim (m', n')$ , wobei  $\sim$  die Differenzgleichheit von geordneten Paaren natürlicher Zahlen bezeichnet. Beweisen Sie, dass dann gilt

$$(k, l) \cdot (m, n) \sim (k', l') \cdot (m', n'),$$

wobei

$$(k, l) \cdot (m, n) = (k \cdot m + l \cdot n, k \cdot n + l \cdot m).$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Fälle  $(m, n) = (m', n')$  bzw.  $(k, l) = (k', l')$ .

50.\* Gegeben seien drei paarweise verschiedene Ziffern im Stellenwertsystem zur Grundzahl  $g$ . Man subtrahiere die kleinste dreistellige Zahl mit diesen Ziffern (in geeigneter Reihenfolge) von der größten dreistelligen Zahl mit diesen Ziffern. Dann wende man das selbe Verfahren auf die Ziffern des Ergebnisses an usw. (Die entstehende Folge von Differenzen nennt man einen Minusturm.)

*b.w.*

Zeigen Sie, dass die Differenzen ebenfalls drei paarweise verschiedene Ziffern haben, falls  $g$  gerade ist. Bestimmen Sie die mittlere Ziffer und die Quersumme der entstehenden Differenzen. Weiter sei  $q$  der abgerundete Quotient von  $g$  und 2. Zeigen Sie, dass sich die Differenzen nach spätestens  $q$  Schritten nicht mehr ändern, falls  $g$  gerade ist, während sich dann immer zwei Differenzen abwechseln, falls  $g$  ungerade ist.