Universität Bielefeld WS 2010/11
Prof. W. Hoffmann

Übungen zu Zählen und Zahlbereiche

Blatt 11 - Abgabe bis 13.1.2011

51. Beweisen Sie, dass für alle ganzen Zahlen a, b und c das Assoziativgesetz der Addition
$$(a + b) + c = a + (b + c)$$
gilt.

52. Beweisen Sie, dass für alle ganzen Zahlen a, b und c das Distributibgesetz
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
gilt.

53. (a) Zeigen Sie, dass für jede ganze Zahl a die Zahl $a(5a - 1)$ gerade ist.
(b) Ist die durch
$$f(x) = x(5x - 1) : 2$$
gegebene Abbildung $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ injektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis: Wenden Sie in Teil (a) Aufgabe 48 an, formen Sie für Teil (b) die Gleichung
$$a(5a - 1) = b(5b - 1)$$
um in die Gleichung
$$(5(a + b) - 1)(a - b) = 0.$$

54. Es seien f und g kommutierende bijektive Abbildungen einer Menge M in sich selbst. Zeigen Sie, dass für alle ganzen Zahlen a und b gilt
$$(f \circ g)^a = f^a \circ g^a, \qquad f^{a \cdot b} = (f^a)^b.$$

55.* Es sei $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ eine Abbildung mit der Eigenschaft
$$f(a + b) = f(a) + f(b)$$
für alle ganzen Zahlen a und b. Zeigen Sie, dass dann
$$f(a \cdot b) = a \cdot f(b)$$
für alle ganzen Zahlen a und b gilt.