Universität Bielefeld WS 2010/11
Prof. W. Hoffmann

Übungen zu Zählen und Zahlbereiche

Blatt 12 - Abgabe bis 20.1.2011

56. Ein Ehepaar mit drei Kindern hat 14 verschiedenfarbige Ostereier vorbereitet.

    (a) Die Eltern planen, die Eier bei schönem Wetter im Garten zu verstecken. Wie viele verschiedene Ergebnisse sind möglich, wenn die Kinder nach der Suche vorzeigen, welche Eier sie jeweils gefunden haben?

    (b) Wenn die Eiersuche wegen schlechten Wetters ausfallen muss, darf sich das jüngste Kind vier Eier aussuchen, dann das mittlere vier von den verbliebenen und schließlich ebenso das älteste. Wieviele Wahlmöglichkeiten haben die Kinder jeweils?

57. Es sei N eine endliche Menge der Mächtigkeit n, und es sei k eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft $k \leq n$. Zeigen Sie, dass es in N genauso viele Teilmengen der Mächtigkeit k gibt, wie es Teilmengen der Mächtigkeit $n-k$ gibt.

    Hinweis: Ordnen Sie jeweils einer Teilmenge K die Teilmenge $N \setminus K$ zu.

58. Beweisen Sie durch vollständige Induktion nach n, dass für alle natürlichen Zahlen n, m und $k \geq 1$ gilt

$$\binom{m}{k} + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\binom{m+2i}{k+i-1} + \binom{m+2i+1}{k+i+1} \right) = \binom{m+2n}{k+n}.$$

59. Wir betrachten folgende Relation auf der Menge der Abbildungen $N \to M$: Es gelte $f \sim g$, wenn es eine Permutation p von N gibt, so dass $g = f \circ p$. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

60.* Zeigen Sie, dass man in dem Ausdruck

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

auf

$$\binom{2n}{n} : (n+1)$$

verschiedene Weisen Klammern setzen kann, so dass die Reihenfolge der Ausführung der Operationen festgelegt ist und kein Klammernpaar überflüsig ist.