

## Übungen zu Zählen und Zahlbereiche

### Blatt 6 - Abgabe bis 25.11.2010

26. Zeigen Sie, dass für beliebige Kardinalzahlen  $m$  und  $n$  gilt: Wenn  $m < n$ , dann  $m + 1 \leq n$ . Zeigen Sie, dass für natürliche Zahlen auch die Umkehrung gilt.
27. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass jede nichtleere endliche Menge mit einer Ordnung ein kleinstes Element besitzt. Folgern Sie daraus, dass jede Ordnung auf einer nichtleeren endlichen Menge eine Wohlordnung ist.
28. Es sei  $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  eine injektive Abbildung mit der Eigenschaft  $f(n) \leq n$  für alle natürlichen Zahlen  $n$ . Beweisen Sie unter Benutzung der Wohlordnung von  $\mathbf{N}$ , dass für alle natürlichen Zahlen  $n$  gilt  $f(n) = n$ .
29. Es sei  $\leq$  eine Ordnung auf der Menge  $M$  und  $\preceq$  eine Ordnung auf der Menge  $N$ . Beweisen Sie, dass die lexikographische Ordnung  $\trianglelefteq$  auf dem Kreuzprodukt  $M \times N$  wirklich eine Ordnung ist. Zeigen Sie, dass sie sogar eine Wohlordnung ist, wenn  $\leq$  und  $\preceq$  Wohlordnungen sind.
- 30.\* Beweisen Sie für beliebige Kardinalzahlen  $m$  und  $n$  die Ungleichung

$$(1 + m)^n \geq 1 + n \cdot m.$$