

Übungen zu Zählen und Zahlbereiche

Blatt 7 - Abgabe bis 2.12.2010

31. Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen k , l und n gilt:

- (a) Wenn $k + n \leq l + n$, dann $k \leq l$.
- (b) Wenn $k < l$ und $n \neq 0$, dann $k \cdot n < l \cdot n$.
- (c) Wenn $k \cdot n \leq l \cdot n$ und $n \neq 0$, dann $k \leq l$.
- (d) Wenn $k \cdot n = l \cdot n$ und $n \neq 0$, dann $k = l$.

Hinweis: Benutzen Sie in (a) und (b) Satz 25, bilden Sie in (c) die Kontraposition, folgern Sie (d) aus (c).

32. Beweisen Sie folgende Aussagen über natürlichen Zahlen k , m und n :

- (a) Sind m und n durch k teilbar, so gilt $(m + n) : k = m : k + n : k$.
- (b) Ist außerdem $m \geq n$, so gilt $(m - n) : k = m : k - n : k$.

Insbesondere existieren die vorkommenden Quotienten.

33. Beweisen Sie folgende Aussagen.

- (a) Wenn $m, n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ und $m \mid n$, dann $m \leq n$.
- (b) Die Teilbarkeitsrelation \mid ist eine Halbordnung auf der Menge $\mathbf{N} \setminus \{0\}$, aber keine Ordnung.

34. Beweisen Sie die Potenzgesetze

$$k^{m+n} = k^m \cdot k^n, \quad k^{m \cdot n} = (k^m)^n,$$

wobei die Potenzen rekursiv definiert sind, für natürliche Zahlen k , m und n durch vollständige Induktion nach n . (Hinweis: Benutzen Sie das erste der beiden Gesetze beim Beweis des zweiten.)

35.* Es sei \preceq eine Wohlordnung auf der Menge M ohne größtes Element und a das kleinste Element. Für jedes Element x von M bezeichnen wir das kleinste Element der Menge $\{y \in M \mid y \succ x\}$ mit $f(x)$. Weiter sei $g : \mathbf{N} \rightarrow M$ die Abbildung mit den Eigenschaften

$$g(0) = a, \quad g(n+1) = f(g(n)) \quad \text{für alle } n \in \mathbf{N}$$

und N ihr Wertebereich. Beweisen Sie folgende Aussagen.

- (a) Für alle $m, n \in \mathbf{N}$ gilt: Wenn $m < n$, dann $g(m) \prec g(n)$.
- (b) Für alle $x, y \in M$ gilt: Ist $x \preceq y$ und $y \in N$, so ist auch $x \in N$.