

Übungen zu Zählen und Zahlbereiche

Blatt 9 - Abgabe bis 16.12.2010

41. Dividieren Sie schriftlich mit Rest im Dualsystem 10110011101110011 durch 11011001010.

Hinweis: Verwenden Sie ein Blatt im Querformat.

42. Wir definieren die Folge von natürlichen Zahlen x_n rekursiv durch

$$x_0 = 3, \quad x_{n+1} = (x_n + 1)^2.$$

Beweisen Sie durch vollständige Induktion für alle natürlichen Zahlen n die Ungleichung

$$x_n \geq 3^{2^n}.$$

Prüfen Sie nach, dass für alle n gilt

$$x_n^3 - 1 = (x_n - 1)(x_{n+1} - x_n).$$

43. Zeigen Sie, dass für beliebige natürliche Zahlen n und $a \geq b$ gilt

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{i=1}^n a^{n-i} b^{i-1}.$$

Benutzen Sie dabei durchgängig das Summenzeichen.

Hinweis: Formen Sie die rechte Seite um.

44. Beweisen Sie mit Hilfe der Rechengesetze für die Addition ganzer Zahlen das dritte Assoziativgesetz der Subtraktion

$$(a - b) + c = a - (b - c).$$

Beweisen Sie, dass für alle ganzen Zahlen a, b, c und d gilt

$$(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d),$$

wobei Sie die Assoziativgesetze der Subtraktion benutzen dürfen.

- 45.* Gegeben sei eine Folge von natürlichen Zahlen $g_i > 1$. Wir definieren die Folge der Zahlen p_i rekursiv durch $p_0 = 1$, $p_{i+1} = p_i g_i$ für alle i . Zeigen Sie, dass es für jede natürliche Zahl n eine eindeutig bestimmte Folge von natürlichen Zahlen c_i gibt, von denen nur endlich viele von Null verschieden sind, so dass $c_i < g_i$ für alle i und

$$n = \sum_{i=0}^{\infty} c_i p_i.$$