

Erste Klausur „Zählen und Zahlbereiche“

Jede der vier Aufgaben wird mit zehn Punkten bewertet.

Aufgabe 1

Es seien $f : M \rightarrow N$ und $g : L \rightarrow M$ Abbildungen. Beweisen Sie:

- (a) Wenn f und g injektiv sind, dann ist $f \circ g$ injektiv.
- (b) Wenn $f \circ g$ injektiv ist und g surjektiv ist, dann ist f injektiv.

Aufgabe 2

Wir definieren eine Folge von natürlichen Zahlen x_n rekursiv durch

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n(3^{2^n} + 1).$$

Berechnen Sie die Glieder x_1, \dots, x_4 .

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$2x_n = 3^{2^n} - 1.$$

Aufgabe 3

Definieren Sie die Begriffe

Differenzgleichheit, ganze Zahl, Addition ganzer Zahlen.

Formulieren und beweisen Sie das Assoziativgesetz der Addition ganzer Zahlen unter Benutzung der Definitionen sowie der Rechengesetze für natürliche Zahlen.

Aufgabe 4

- (a) Ein Student will sieben Fertiggerichte einkaufen. Er mag nur Hamburger, Pizza und Lasagne. Auf wie viele verschiedene Weisen kann er seinen Einkauf zusammenstellen?
- (b) Angenommen, der Student hat vier Pizzas und drei Hamburger gekauft. Wie viele Möglichkeiten hat er, daraus einen Speiseplan für eine Woche zusammenzustellen?

Geben Sie jeweils an, ob es sich um Kombinationen oder Variationen mit oder ohne Wiederholung handelt.