

Übungen zu Zählen und Zahlbereiche

Blatt 10 - Abgabe bis 8.1.2008

46. Es sei N eine endliche Menge und K ihre Teilmenge. Beweisen Sie die Gleichung $|N \setminus K| = |N| - |K|$. Zeigen Sie außerdem, dass für alle natürlichen Zahlen n und k mit der Eigenschaft $k \leq n$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

47. Es sei \preceq eine Ordnung auf einer Menge M . Eine Teilmenge I von M heißt Intervall, wenn für beliebige Elemente x und z von I alle Elemente y von M mit den Eigenschaften $x \preceq y$ und $y \preceq z$ ebenfalls zu I gehören. Beweisen Sie folgende Aussagen.

- (a) Der Durchschnitt zweier Intervalle ist ein Intervall.
- (b) Die Vereinigung zweier Intervalle, die ein gemeinsames Element besitzen, ist ein Intervall.

48. Folgern Sie aus den Rechengesetzen für ganze Zahlen, dass für alle ganzen Zahlen a, b, c und d gilt

$$(a - b) \cdot (c - d) = (a \cdot c + b \cdot d) - (a \cdot d + b \cdot c).$$

49. Es sei $(k, l) \sim (k', l')$ und $(m, n) \sim (m', n')$, wobei \sim die Differenzgleichheit von geordneten Paaren natürlicher Zahlen bezeichnet. Beweisen Sie, dass dann gilt

$$(k, l) \cdot (m, n) \sim (k', l') \cdot (m', n'),$$

wobei

$$(k, l) \cdot (m, n) = (k \cdot m + l \cdot n, k \cdot n + l \cdot m).$$

- 50.* Es sei M eine Menge, $u \in M$, $f : M \rightarrow M$ eine bijektive Abbildung und g ihre Umkehrabbildung.

- (a) Zeigen Sie, dass es genau eine Abbildung $h : \mathbf{Z} \rightarrow M$ gibt, so dass $h(0) = u$ ist und für alle $a \in \mathbf{Z}$ gilt

$$f(h(a)) = h(a + 1), \quad g(h(a)) = h(a - 1).$$

- (b) Es sei $n \in \mathbf{N}$, und für eine ganze Zahl a gelte $h(a) = h(a + n)$. Zeigen Sie, dass dies dann für alle ganzen Zahlen a gilt.