Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann

WS 2008/09

Übungen zu Zählen und Zahlbereiche

Blatt 11 - Abgabe bis 15.1.2009

51. Beweisen Sie folgende Aussage: Ist m eine natürliche Zahl und sind c, d ganze Zahlen derart, dass $c \leq d$, dann ist $m \cdot c \leq m \cdot d$.

    Belegen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass sich Satz 25(ii) der Vorlesung nicht auf ganze Zahlen verallgemeinern lässt.

52. (a) Zeigen Sie, dass für jede ganze Zahl a die Zahl $a(3a+1)$ gerade ist.

    (b) Ist die durch
    $$f(x) = x(3x+1) : 2$$
    gegebene Abbildung $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ injektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.
    Hinweis: Formen Sie die Gleichung
    $$a(3a+1) = b(3b+1)$$
    in die Gleichung
    $$(3(a+b)+1)(a-b) = 0$$
    um.

53. (a) Wieviele Möglichkeiten gibt es für den Inhalt einer Geldbörse, die sieben europäische Münzen enthält? (In Europa sind Münzen zu 1, 2, 5, 10, 20 und 50 Cent sowie 1 und 2 Euro in Umlauf.)

    (b) Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus einem Repertoire von 12 Musikstücken ein Programm mit 7 Stücken zusammenzustellen, in dem kein Stück mehrmals gespielt wird?

54. Beweisen Sie die Identität $(n)_n = n!$ für alle natürlichen Zahlen n durch vollständige Induktion unter Benutzung des Produktzeichens.

    Hinweis: Wenden Sie die Substitutionsregel an.

55.* Es sei $S(n,k)$ die Anzahl der Möglichkeiten, eine Menge der Mächtigkeit n in k Klassen einzuteilen. Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen k und n gilt
$$S(n+1,k) = kS(n,k) + S(n,k-1).$$

    Zeigen Sie, dass die Anzahl der surjektiven Abbildungen aus einer Menge der Mächtigkeit n in eine Menge der Mächtigkeit k gleich $k!S(n,k)$ ist.