Universität Bielefeld WS 2008/09
Prof. W. Hoffmann

Übungen zu Zählen und Zahlbereiche

Blatt 5 - Abgabe bis 20.11.2008

21. Es sei $s : N \to N$ eine Nachfolgerabbildung und $\{u, v\}$ eine Zweiermenge. Wir definieren eine Abbildung f der Menge $N \times \{u, v\}$ in sich selbst durch die Festlegung

$$f(x, u) = (x, v), \qquad f(x, v) = (s(x), u)$$

für alle $x \in N$. (An Stelle von $f\big((x, u)\big)$ schreiben wir der Einfachheit halber $f(x, u)$.) Zeigen Sie, dass auch f eine Nachfolgerabbildung ist.

22. Beweisen Sie durch vollständige Induktion nach der Variablen n, dass das Produkt zweier natürlicher Zahlen m und n eine natürliche Zahl ist. (Sie dürfen die analoge Aussage über die Summe benutzen.)

23. Stellen Sie die in Aufgabe 8 gegebene Abbildung f der Menge $\{a, b, c, d, e\}$ in sich selbst als Verkettung von mehreren Transpositionen dar.

24. Beweisen Sie für natürliche Zahlen n und k die Identität

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

wobei $\binom{n}{k}$ (gelesen „n über k“) die Anzahl der Teilmengen der Mächtigkeit k in einer Menge der Mächtigkeit n bezeichnet.

Hinweis: Betrachten Sie eine Menge N mit $|N| = n$ und $M = N \cup \{a\}$ mit $a \notin N$. Zeigen Sie, dass N genauso viele Teilmengen der Mächtigkeit k besitzt, wie M Teilmengen der Mächtigkeit $k+1$ besitzt, welche a enthalten.

25.* Es sei $s : N \to N$ eine Nachfolgerabbildung, $x \in N$ und L der s-Abschluss der Menge $\{x\}$. Zeigen Sie, dass der s-Abschluss der Menge $\{s(x)\}$ gleich $L \setminus \{x\}$ ist.

Hinweis: Dazu sind zwei Aussagen zu beweisen:

(a) Die Menge $L \setminus \{x\}$ ist s-abgeschlossen.

(b) Ist K eine s-abgeschlossene Menge und $s(x) \in K$, so ist $L \setminus \{x\} \subseteq K$.