Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann WS 2008/09

Übungen zu Zählen und Zahlbereiche

Blatt 6 - Abgabe bis 27.11.2008

26. Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen k, l, m und n gilt: Wenn $k \leq l$ und $m \leq n$, dann gilt $k \cdot m \leq l \cdot n$.

    (Hinweis: Behandeln Sie zunächst den Fall $m = n$ mit Hilfe der vollständigen Induktion.)

27. Beweisen Sie durch vollständige Induktion nach m, dass es zu beliebigen natürlichen Zahlen m und $n \neq 0$ natürliche Zahlen q und r gibt, so dass

    $$m = q \cdot n + r \qquad \text{und} \qquad r < n.$$

    (Man nennt q den abgerundeten Quotienten und r den Rest bei der Division von m durch n.)

28. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass jede nichtleere endliche Menge mit einer Ordnung ein kleinstes Element besitzt. Folgern Sie daraus, dass jede Ordnung auf einer nichtleeren endlichen Menge eine Wohlordnung ist.

29. Es sei $\leq$ eine Ordnung auf der Menge M und $\preceq$ eine Ordnung auf der Menge N. Beweisen Sie, dass die lexikographische Ordnung $\trianglelefteq$ auf dem Kreuzprodukt $M \times N$ wirklich eine Ordnung ist. Zeigen Sie, dass sie sogar eine Wohlordnung ist, wenn $\leq$ und $\preceq$ Wohlordnungen sind.

30.* Es sei $\leq$ eine Wohlordnung auf der Menge M und $\preceq$ eine Ordnung auf der Menge N. Wir definieren eine Relation $\trianglelefteq$ auf der Menge N^M wie folgt. Für Abbildungen $f, g : M \to N$ bedeutet $f \trianglelefteq g$ das Folgende: Es ist $f = g$ oder für das kleinste Element x von M mit der Eigenschaft $f(x) \neq g(x)$ gilt $f(x) \preceq g(x)$.

    Beweisen Sie, dass $\trianglelefteq$ eine Ordnung ist. Beweisen Sie, dass $\trianglelefteq$ sogar eine Wohlordnung ist, wenn $\leq$ und $\preceq$ Wohlordnungen sind und M endlich ist.