

Übungen zu Zählen und Zahlbereiche

Blatt 7 - Abgabe bis 4.12.2008

31. Beweisen Sie durch vollständige Induktion nach n , dass für alle natürlichen Zahlen m und n gilt

$$(1 + m)^n \geq 1 + m \cdot n.$$

32. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen k , l und $n \neq 0$ gilt:

$$\text{Wenn } k \cdot n = l \cdot n, \text{ dann } k = l.$$

Sie dürfen die entsprechende Kürzungsregel für die Addition verwenden.

33. Beweisen Sie folgende Aussagen über natürlichen Zahlen l , m und n :

(a) Ist n durch l teilbar, so gilt $(m \cdot n) : l = m \cdot (n : l)$.

(b) Sind m und n durch l teilbar, so gilt $(m + n) : l = m : l + n : l$.

34. Beweisen Sie die Potenzgesetze

$$k^{m+n} = k^m \cdot k^n, \quad k^{m \cdot n} = (k^m)^n,$$

wobei die Potenzen rekursiv definiert sind, für natürliche Zahlen k , m und n durch vollständige Induktion nach n .

Hinweis: Benutzen Sie das erste der beiden Gesetze beim Beweis des zweiten.

- 35.* Wir wählen eine beliebige natürliche Zahl $a \neq 0$ und definieren eine unendliche Folge x_0, x_1, x_2, \dots rekursiv durch folgende Festlegung.

Es sei $x_0 = a$. Ist x_n gerade, so setzen wir $x_{n+1} = x_n : 2$.

Ist x_n ungerade, so setzen wir $x_{n+1} = x_n + 1$.

Zeigen Sie, dass es eine natürliche Zahl n gibt, so dass $x_n = 1$.