

## Zweite Klausur „Zählen und Zahlbereiche“

Jede Aufgabe wird mit 6 Punkten bewertet.

### Aufgabe 1

Beweisen Sie für beliebige Mengen  $K$ ,  $L$ ,  $M$  und  $N$ : Wenn

$$K \sim M \quad \text{und} \quad L \sim N,$$

dann ist

$$K \times L \sim M \times N,$$

wobei das Zeichen  $\sim$  die Gleichmächtigkeit bezeichnet.

### Aufgabe 2

- (a) Wandeln Sie die Zahlen 634 und 11 ins Stellenwertsystem zur Grundzahl 4 um.
- (b) Geben Sie die Additions- und die Multiplikationstabelle für dieses System an.
- (c) Berechnen Sie mit Hilfe dieser Tabellen das Produkt der beiden gegebenen Zahlen im Stellenwertsystem zur Grundzahl 4.

### Aufgabe 3

Wir führen auf der Menge  $\mathbf{N} \times (\mathbf{N} \setminus \{0\})$  eine Relation  $\approx$  ein, indem wir festlegen:

$$(k, l) \approx (m, n), \quad \text{wenn} \quad k \cdot n = l \cdot m.$$

Beweisen sie, dass dies eine Äquivalenzrelation ist. Sie dürfen dazu die Rechengesetze und die Kürzungsregel für die Multiplikation natürlicher Zahlen benutzen.

### Aufgabe 4

Wir definieren zwei Folgen  $x_n$  und  $y_n$  rekursiv durch

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, & x_{n+1} &= 2x_n + 1, \\ y_0 &= 1, & y_{n+1} &= 4y_n + 3. \end{aligned}$$

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen  $n$  gilt

$$2x_n^2 + 4x_n + 1 = y_n.$$