

## Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

### Blatt 10 - freiwillige Abgabe bis 11.1.2006

47.\* Zeigen Sie, dass für positive natürliche Zahlen  $a$ ,  $b$  und  $c$  gilt

$$\text{kgV}(a, b, c) = \text{kgV}(\text{kgV}(a, b), c).$$

48.\* Eine positive natürliche Zahl heißt quadratfrei, wenn sie durch keine Quadratzahl außer 1 teilbar ist.

Zeigen Sie, dass eine positive natürliche Zahl genau dann quadratfrei ist, wenn keine Primzahl mehr als einmal in ihrer Primfaktorzerlegung vorkommt.

Zeigen sie auch, dass sich jede positive natürliche Zahl auf eindeutige Weise als Produkt einer Quadratzahl und einer quadratfreien Zahl schreiben lässt.

49.\* Zeigen Sie: Es gibt unendlich viele Primzahlen  $p$  mit der Eigenschaft

$$p \equiv -1 \pmod{3}.$$

(Hinweis: Nehmen Sie an, es gäbe nur endlich viele, sagen wir  $p_1, \dots, p_r$ , und betrachten Sie  $N = 3p_1 \dots p_r - 1$ .)

50.\* Finden Sie das kleinste Vielfache von 11, das bei Division durch 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 10 jedesmal den Rest 1 lässt.

51.\* Finden Sie alle Lösungen der Kongruenz

$$2x^3 + 962x^2 + 474 \equiv 0 \pmod{11^3}.$$