Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann

WS 2006/07

# Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

**Blatt 13 - Abgabe bis 1.2.2006**

62. Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen ein Halbsystem modulo 21 ist.

    (a) $\{6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24\}$,

    (b) $\{-11, 1, 4, 7, 8, 12, 16, 19, 24, 27\}$,

    (c) $\{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21\}$.

63. Berechnen Sie folgende Jacobi-Symbole unter alleiniger Verwendung der Definition:
$$\left(\frac{5}{19}\right), \qquad \left(\frac{-7}{25}\right)$$

64. Entscheiden Sie mit Hilfe des quadratischen Reziprozitätsgesetzes und seiner Ergänzungssätze, ob $40\,077$ ein quadratischer Rest modulo $65\,537$ ist.

65. Geben sie an, modulo welcher Primzahlen $p$ die Zahl 3 ein quadratischer Rest ist. (Die Antwort hängt von der Restklasse von $p$ modulo 12 ab.)

66.* Es sei $n > 0$ eine natürliche Zahl, so dass $p = 2^n + 1$ eine Primzahl ist. Beweisen Sie folgende Aussagen.

    (a) $n = 2^k$ für eine natürliche Zahl $k$.

    (b) $p \equiv 1 \pmod{2^{k+1}}$.

    (c) Ist $k \geq 2$, so ist 2 ein quadratischer Rest modulo $p$, und es gilt
$$p \equiv 1 \pmod{2^{k+2}}.$$