Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann

WS 2006/07

# Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

**Blatt 3 - Abgabe bis 9.11.2006**

11. Finden Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen in natürlichen (!) Zahlen.

$$(a)\quad 21x + 35y = 217, \qquad (b)\quad 41053x + 33977y = 1415627.$$

12. Gegeben sei eine gebrochene Zahl $q \neq 0$. Zeigen Sie, dass es für jede Primzahl $p$ eine eindeutig bestimmte ganze Zahlen $e_p$ gibt, so dass nur endlich viele dieser Zahlen nicht Null sind und dass gilt

$$q = 2^{e_2} 3^{e_3} 5^{e_5} \ldots$$

Folgern Sie, dass eine gebrochene Zahl genau dann die $n$te Potenz einer anderen rationalen Zahl ist, wenn alle Exponenten in ihrer Primfaktorzerlegung durch $n$ teilbar sind.

13. Es seien $a$, $b$ und $m$ positive natürliche Zahlen. Beweisen Sie mit Hilfe der Primfaktorzerlegung:

    (a) $m = \mathrm{kgV}(a, b)$ genau dann, wenn $e_p(m) = \max(e_p(a), e_p(b))$ für alle $p$.

    (b) $\mathrm{ggT}(a, b)\,\mathrm{kgV}(a, b) = ab$.

14. Es seien $a$, $b$ und $c$ positive natürliche Zahlen. Beweisen Sie folgende Aussagen.

    (a) Ist $a^2 \mid b^2$, so gilt $a \mid b$.

    (b) Ist $\mathrm{ggT}(a, b, c) = 1$ und $ab = c^2$, so sind $a$ und $b$ Quadratzahlen.

15.* Man bestimme alle natürlichen Zahlen $n$, so dass $n + 2006$ ein Teiler von $n^2 + 2006$ ist.