Universität Bielefeld
Prof. W. Hoffmann

WS 2006/07

Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

Blatt 7 - Abgabe bis 7.12.2006

31. Zeigen Sie durch Reduktion modulo einer geeigneten Zahl, dass die Diophantische Gleichung
$$3x^4 - 2y^4 = 5$$
keine Lösung hat.

32. Finden Sie alle Lösungen folgender Kongruenzen:
$$x^3 + x^2 - 4 \equiv 0 \pmod{7^3}, \qquad x^3 + x^2 - 5 \equiv 0 \pmod{7^3}.$$

33. Finden Sie alle Lösungen der Kongruenz
$$x^3 + 2x^2 - 1 \equiv 0 \pmod{2^3 3^2}.$$

34. Finden Sie alle Lösungen der Kongruenz
$$x^3 - 52x - 21 \equiv 0 \pmod{5^3}.$$

35.* Es sei $f(x)$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Angenommen, die Kongruenz
$$f(x) \equiv 0 \pmod{p}$$
hat genau s Lösungen $[x_1]_p, \ldots, [x_s]_p$, und für jede Lösung $[x_i]_p$ ist $f'(x_i)$ nicht durch p teilbar. Zeigen Sie, dass dann für eine beliebige positive natürliche Zahl e auch die Kongruenz
$$f(x) \equiv 0 \pmod{p^e}$$
genau s Lösungen hat.