Lösungsvorschlag 1. Klausur Analysis I und II, WS 2015/16

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

gilt.

Lösungsvorschlag: Vollständige Induktion nach n:
Induktionsanfang: n=1: $\frac{1}{(2\cdot 1-1)\cdot(2\cdot 1+1)} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2\cdot 1+1}$

Induktionsschritt: Induktionsannahme: Es gilt für ein $n \in \mathbb{N}$: $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$

z.z. $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} = \frac{n+1}{2n+3}$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} + \frac{1}{(2(n+1)-1)\cdot(2(n+1)+1)} \\
(I.V.) \quad &= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)} \\
&= \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)\cdot(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)\cdot(2n+3)} = \frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+1)\cdot(2n+3)} \\
&= \frac{n+1}{2n+3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

(i) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$$

konvergent? Wogegen konvergiert sie für diese x?

(ii) Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^6 e^{-n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2-15n-3}{n^2(n+1)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n^2}$$

Lösungsvorschlag:

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-x})^n$ ist geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit $q = e^{-x}$

Somit Reihe konvergent $\Leftrightarrow |q| = |e^{-x}| = e^{-x} < 1 \Leftrightarrow x > 0$

In diesem Fall gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-e^{-x}}$

(ii):

$\sum_{n=0}^{\infty} n^6 e^{-n}$: Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{(n+1)^6 e^{-(n+1)}}{n^6 e^{-n}} \right| = \left(\frac{n+1}{n} \right)^6 \cdot \frac{1}{e} \to \frac{1}{e} < 1 \quad \text{für } n \to \infty$$

$\Rightarrow$ konvergent

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2-15n-3}{n^2(n+1)^2}$: Majorantenkriterium

$$\left| \frac{4n^2 - 15n - 3}{n^2(n+1)^2} \right| \leq \left| \frac{4n^2}{n^2 \cdot n^2} \right| = 4 \cdot \frac{1}{n^2}$$

und $4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergente Majorante.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n^2}$: Exponenielles Wachstum ist stärker als Potenzwachstum $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n^2} = \infty$,
d.h die Folge ist nicht beschränkt $\Rightarrow$ Reihe divergent.

Aufgabe 3

Es sei $f : [a, b] \to [a, b]$ eine stetige Funktion des Intervalls $[a, b]$ in sich selbst.
Zeigen Sie, dass es dann ein $x \in [a, b]$ gibt mit $f(x) = x$.

Lösungsvorschlag: Es gilt $f(x) = x \Leftrightarrow g(x) := f(x) - x = 0$
Es gilt: $g(a) = f(a) - a \geq a - a = 0$ und $g(b) = f(b) - b \leq b - b = 0$ und g ist stetig.

Falls $g(a) = 0$ oder $g(b) = 0$, fertig
Ansonsten gilt $g(a) > 0$ und $g(b) < 0$. Dann besagt aber der Zwischenwertsatz, dass ein $x \in]a, b[$ existiert mit $g(x) = 0$.

Aufgabe 4

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{falls} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(i) Ist f stetig in $(0,0)$?

(ii) Bestimmen Sie $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(iii) Ist f differenzierbar in $(0,0)$?

Lösungsvorschlag:
(i): Es gilt für $(x,y) \neq (0,0)$:

$$|f(x,y)| = \left| \frac{xy^2}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{|x|(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \leq |x| \to 0 = f(0,0) \text{ für } (x,y) \to (0,0)$$

$\Rightarrow f$ stetig in $(0,0)$.

(ii)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{0-0}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{0-0}{h} = 0$$

(iii) Ist f diff'bar in $(0,0)$, so wäre $Df(0,0) = (0\ 0)$ und es müsste für

$$\phi(x,y) := f(x,y) - f(0,0) - Df(0,0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

gelten: $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\neq(0,0)}} \dfrac{\phi(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0$

Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist $\phi(x,y) = \frac{\frac{xy^2}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$
Speziell für $(x,y) = (t,t)$ und $t \to 0$ folgt aber

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{\phi(t,t)}{\|(t,t)\|} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{t \cdot t^2}{(2t^2)^{3/2}} = \frac{1}{2^{3/2}} \neq 0$$

Daher ist f nicht diff'bar in $(0,0)$.

Aufgabe 5: Es seien (X, d), (Y, d') metrische Räume, $M \subset X$ eine Teilmenge, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X und $f : X \to Y$ eine stetige Funktion.

- Ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so ist sie beschränkt: wahr
  Bemerkung: Beschänktheit ist notwendige Eigenschaft konvergenter Folgen.

- Ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so besitzt sie eine konvergente Teilfolge: falsch
  Bemerkung: Dies gilt in $\mathbb{R}^n$, aber nicht in beliebigen metrischen Räumen, da dort der Abschluss einer beschränkten Menge nicht kompakt sein muss, vgl. Übung Ana II, Aufgabe 32.

- Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M, die gegen ein $x \in X$ konvergiert, so gilt $x \in \partial M$: falsch
  Bemerkung: Der Grenzwert der Folge liegt immer im Abschluss von M, auf dem Rand muss er nicht liegen.

- Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M, die gegen ein $x \in X$ konvergiert und ist M offen, so gilt $x \in M$: falsch
  Bemerkung: Wie oben: Grenzwert liegt im Abschluss, bei einer offenen Menge können solche Punkte außerhalb von M liegen, z.B. Folge in offener Kugel, die gegen Punkt am Rand konvergiert.

- Es gibt eine Umgebung von x_1, die x_2 enthält: wahr
  Bemerkung: Umgebungen von x_1 sind alle Obermengen offener Kugeln um x_1, also z.B. ganz X.

- Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so ist $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent: wahr
  Bemerkung: Folgenstetigkeit

- Ist M Umgebung von $x \in X$, so ist $f(M)$ Umgebung von $f(x)$: falsch
  Bemerkung: Urbilder von Umgebungen unter stetigen Abbildungen sind Umgebungen, Bilder i.Allg. nicht, z.B. konstante Abbildung. Dann ist Bild einpunktig, also keine Umgebung, wenn der Punkt kein isolierter Punkt ist

- Ist M kompakt, so ist $f(M)$ beschränkt: wahr
  Bemerkung: stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt und damit beschränkt.

- Ist $V \subset Y$ kompakt, so ist $f^{-1}(V)$ kompakt: falsch
  Bemerkung: Urbilder kompakter Mengen unter stetigen Abbildungen sind i.Allg. nicht kompakt (aber abgeschlossen als Urbilder abgeschlossener Mengen), z.B. ist für eine konstante Abbildung das Urbild dieses Werts der ganze Raum, der nicht kompakt sein muss.

- Ist $V \subset Y$ offen, so ist $f^{-1}(V)$ nicht abgeschlossen. : falsch
  Bemerkung: Das Urbild von V ist sicher offfen, was aber nicht ausschließt, dass es auch abgeschlossen ist, z.B. ist für $V = Y$ das Urbild immer ganz X, also abgeschlossen (und offen).

Aufgabe 6

Es seien $f_n, f : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, Funktionen auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$.

(i) Geben Sie die Definition der gleichmäßigen Konvergenz der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f an.

(ii) Es sei nun konkret $I = [0, 1]$ und
$$f_n(x) := x^n(1 - x).$$
Bestimmen Sie den punktweisen Limes der Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(iii) Entscheiden Sie in der Situation von (ii), ob die Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig ist.

Lösungsvorschlag:
(i) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f, wenn
$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ |f(x) - f_n(x)| < \epsilon\ \forall x \in I \text{ und } \forall n \geq n_0$$
(ii) Es gilt für $0 \leq x < 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ und daher $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n(1-x) = 0\cdot(1-x) = 0$ und für x=1 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = \lim\limits_{n\to\infty} 1^n(1 - 1) = 1 \cdot 0 = 0$ und daher konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen f mit $f(x) = 0$ für alle $x \in [0, 1]$.
(iii) Damit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert, muss gelten $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$
Da $f_n \geq 0$, ist
$$\|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |x^n(1 - x)| = \sup_{x\in[0,1]} x^n(1 - x).$$
Nun ist $f_n'(x) = (x^n - x^{n+1})' = nx^{n-1} - (n + 1)x^n = x^{n-1}(n - (n + 1)x)$,
also (für $n > 1$) $f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = \frac{n}{n+1}$
Beachte: f_n nimmt als stetige Funktion auf dem kompakten Intervall $[0, 1]$ Maximum und Minimum als Funktonswert an. Wegen $f_n(0) = f_n(1) = 0$ wird das Minimum in 0 und 1 angenommen, folglich liegt bei $x = \frac{n}{n+1}$ das Maximum (oder zweite Ableitung benutzen).
Daher
$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} x^n(1 - x) = f_n(\frac{n}{n + 1}) = \left(\frac{n}{n + 1}\right)^n (1 - \frac{n}{n + 1}) = \frac{1 - \frac{n}{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n},$$
also
$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = \frac{1 - \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}}{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1 - 1}{e} = 0,$$
d.h. die Konvergenz ist gleichmäßig.

Aufgabe 7

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch
$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy.$$
Bestimmen Sie alle Stellen, an denen f ein lokales Minimum und alle Stellen, an den f ein lokales Maximum annimmt.

Lösungsvorschlag:
Partielle Ableitungen bestimmen und Null setzen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6y = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 6x = 0$$

Es folgt aus erster Gleichung: $y = \frac{1}{2}x^2$. Einsetzen in zweite Gleichung:

$$0 = 3\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 - 6x = \frac{3}{4}x^4 - 6x = \frac{3}{4}x(x^3 - 8)$$

also entweder $x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}0^2 = 0$ oder $x^3 = 8 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}2^2 = 2$
Somit zwei kritische Punkte: $P_1 = (0,0)$ und $P_2 = (2,2)$
Hesse-Matrix bestimmen: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -6$, also

$$\text{Hess } f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 6y \end{pmatrix}$$

Damit für P_1: Hess $f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$. Eigenwerte bestimme, d.h. Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\det \begin{pmatrix} 0 - \lambda & -6 \\ -6 & 0 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 36 = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -6$, also Hess $f(0,0)$ indefinit $\Rightarrow (0,0)$ kein lokales Extremum
(Alternativ: det Hess $f(0,0) = -36 < 0 \Rightarrow$ die beiden Eigenwerte haben verschiedenes Vorzeichen $\Rightarrow$ indefinit)

Für P_2: Hess $f(2,2) = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$
Definitheit z.B. mit Hurwitz $\det(12) = 12 > 0$, $\det \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix} = 144 - 36 = 108 > 0$
$\Rightarrow$ Hess $f(2,2)$ positiv definit $\Rightarrow (2,2)$ ist lokales Minimum.
(Alternativ: Nullstellen des char. Polynoms bestimmen
$\det \begin{pmatrix} 12 - \lambda & -6 \\ -6 & 12 - \lambda \end{pmatrix} = (12-\lambda)^2 - 36 = 144 - 24\lambda + \lambda^2 - 36 = \lambda^2 - 24\lambda + 108 = 0$
$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 12 \pm \sqrt{144 - 108} = 12 \pm \sqrt{36} = 12 \pm 6 > 0$)

Aufgabe 8

Formulieren Sie den Banachschen Fixpunktsatz und führen Sie den Beweis dieses Satzes aus.

Lösungsvorschlag: Banachscher Fixpunktsatz:
Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und $T : X \to X$ eine Kontraktion, d.h. es gibt ein $K < 1$, so dass

$$d(T(x), T(y)) \leq K \cdot d(x,y) \quad \forall x, y \in X.$$

Dann gibt es genau einen Fixpukt von T, d.h. es gibt genau ein $x^* \in X$ mit $T(x^*) = x^*$.

Beweis:
Eindeutigkeit: Seien x^* und y^* Fixpunkte. Dann gilt

$$d(x^*, y^*) = d(T(x^*), T(y^*)) \leq K \cdot d(x^*, y^*),$$

also wegen $K < 1$: $d(x^*, y^*) = 0 \Rightarrow x^* = y^*$.

Existenz: Wähle $x_0 \in X$ beliebig und definiere Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ rekursiv durch $x_{n+1} := T(x_n)$. Dann gilt

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq K \cdot d(x_n, x_{n-1}) \leq \ldots \leq K^n \cdot d(x_1, x_0)$$

und daher für $n > m$ mit Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \ldots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq K^{n-1} \cdot d(x_1, x_0) + \cdots + K^m \cdot d(x_1, x_0) = \left(\sum_{j=m}^{n-1} K^j \right) \cdot d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

Nun ist $\displaystyle\sum_{j=m}^{n-1} K^j$ Abschnittsumme der wegen $K < 1$ konvergenten geometrischen Reihe $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} K^j$ und somit $\displaystyle\sum_{j=m}^{n-1} K^j \to 0$ für $m, n \to \infty$. Daher ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Cauchy-Folge.
X vollständig $\Rightarrow$ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergent gegen einen Punkt $x^* \in X$
Aus Kontraktionseigenschaft von T folgt insbesondere die Stetigkeit von T und daher mit Folgenstetigkeit

$$T(x*) = T(\lim_{n \to \infty} x_n) = \lim_{n \to \infty} T(x_n) = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = x^*,$$

d.h. x^* ist Fixpunkt von T.