ELEMENTARE ZAHLENTHEORIE
0. Übungsblatt

Julia Sauter, Andrew Hubery

Aufgabe 1.

Zeigen Sie, dass es eine größte Zahl gibt, die nicht als lineare Kombination $4x + 7y$ mit $x, y \geq 0$ geschrieben sein kann. Finden Sie diese Zahl. Wir schreiben $g(4, 7)$ für diese Zahl.

Aufgabe 2.

Seien $a, b > 0$ coprim (also $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$). Sie können ($a \mid bk \implies a \mid k$) benutzen.

(a) Gegeben sei eine Zahl n. Zeigen Sie, dass a eine die Zahlen $n - b, n - 2b, \ldots, n - ab$ teilt. (Hinweis: Schreiben Sie jede Zahl in der Form $aq + r$ mit $0 \leq r < a$.)

(b) Beweisen Sie, dass jede Zahl $n > ab - a - b$ als lineare Kombination $ax + by$ mit $x, y \geq 0$ geschrieben sein kann, aber $ab - a - b$ selbst hat keine solche Darstellung. Es folgt, dass $g(a, b) = ab - a - b$.

Aufgabe 3.

Sei $d > 0$ eine quadratfreie Zahl (also für jede Primzahl p teilt p^2 die Zahl d nicht). Wir interessieren uns für die Menge $S := \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x^2 - dy^2 = 1\}$.

(a) Es ist klar, dass S die triviale Punkte $(\pm 1, 0)$ enthält. Sei $t \in \mathbb{Q}$ und G_t die Gerade durch $(1, 0)$ mit Steigung t. Zeigen Sie, dass der Schnitt $G_t \cap S$ genau zwei Punkte enthält und finden Sie beide Punkte.

(b) Zeigen Sie, dass jede Punkt $(x, y) \in S$ mit $x \neq 1$ auf genau eine Gerade G_t mit $t \in \mathbb{Q}$ liegt. Es folgt, dass es eine Bijektion

$$\mathbb{Q} \to (S - \{(1, 0)\}), \quad t \mapsto (x(t), y(t)) \quad \text{mit} \quad (x(t), y(t)) \in G_t \cap (S - \{(1, 0)\})$$

gibt. Finden Sie die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$.

(c) Da t rational ist, können wir $t = p/q$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$ schreiben. Es folgt, dass es eine Surjektion

$$(\mathbb{Z}^2 - \{(0, 0)\}) \to S, \quad (p, q) \mapsto (x(p, q), y(p, q)),$$

gibt. Finden Sie $x(p, q)$ und $y(p, q)$.

(d)* Eigentlich interessieren wir uns für die Punkte $(x, y) \in S$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$. Falls $d = 5$ finden Sie die kleinste nicht triviale Punkt $(a, b) \in S$ mit $a, b \in \mathbb{N}$.

Können Sie alle solche Punkte finden? (Hinweis: Für $(x, y) \in S$ mit $x, y \in \mathbb{N}$ und $y \geq 1$ betrachten Sie die reelle Zahl $x' + y'\sqrt{5} := (x + y\sqrt{5})(a - b\sqrt{5})$. Zeigen Sie, dass $(x', y') \in S$ mit $x', y' \in \mathbb{N}$, und auch $x' < x$ und $y' < y$.)

Für quadratefreie $d > 0$ gibt es immer eine nicht triviale Punkt?

Abgabe: Montag 15. April, bis 12 Uhr in die Postfächer der Tutoren im V3–126