ELEMENTARE ZAHLENTHEORIE
1. Übungsblatt

Julia Sauter, Andrew Hubery

Aufgabe 1.

Seien a, b, c, d ganze Zahlen. Geben Sie schlüssige Begründungen für die folgenden Behauptungen.

(a) Gelten $a \mid b$ und $c \mid d$, so gilt $ac \mid bd$.

(b) Gelten $a \mid b$ und $b \mid c$, so gilt $a \mid c$.

(c) Gelten $a \mid b$ und $b \mid a$, so gilt $a = \pm b$.

(d) Gelten $c \neq 0$ und $ac \mid bc$, so gilt $a \mid b$. *(je 1 Punkt)*

Aufgabe 2.

Für jedes Paar natürlichen Zahlen (m, n) berechnen Sie $\mathrm{ggT}(m, n)$ und finden Sie ganze Zahlen x, y, so dass $\mathrm{ggT}(m, n) = mx + ny$.

(a) $(703, 296)$; (b) $(2406, 654)$; (c) $(721, 448)$. *(je 2 Punkte)*

Aufgabe 3.

Ein pythagoräische Tripel (x, y, z) ist eine nicht triviale Lösung zu $x^2 + y^2 = z^2$ mit $x, y, z \in \mathbb{N}$. Es heißt primitiv, falls $\mathrm{ggT}(x, y, z) = 1$.

Die Abbildung $(a, b) \mapsto (a^2 - b^2, 2ab, a^2 + b^2)$ teilerfremd liefert eine Bijektion zwischen die Menge $\{(a, b) \in \mathbb{N} \mid a > b \text{ teilerfremd}, a - b \text{ ungerade}\}$ und primitive pythagoräischen Tripeln (x, y, z) mit y gerade.

(a) Gibt es ein pythagoräsiches Tripel der Form $(x, y, 89)$? Wenn "ja", finden Sie es.

(b) Finden Sie alle pythagoräischen Tripel der Form $(x, 36, z)$. Welche sind primitiv?

(c) Sei (x, y, z) ein primitives pythagoräsichen Tripel. Begründen Sie, warum 7 kein Teiler von z ist. Hinweis: Schreiben Sie $a^2 = 7q + r$ mit $0 \leq r < 7$. Was sind die Möglichkeiten für r?

(d) Zeigen Sie, dass jedes primitives pythagoräsiches Tripel (x, y, z) mit $z - y = 1$ der Form $\left(t, \frac{1}{2}(t^2 - 1), \frac{1}{2}(t^2 + 1)\right)$ mit $t \in \mathbb{N}$ ungerade hat. *(1+3+2+2 Punkte)*

Aufgabe 4.

Zeigen Sie, dass 2 und 5 immer Teiler von $n^5 - n$ sind. *(2 Punkte)*

Abgabe: Montag 22. April, bis 12 Uhr in die Postfächer der Tutoren im V3–126