ELEMENTARE ZAHLENTHEORIE
7. Übungsblatt

Julia Sauter, Andrew Hubery

Aufgabe 1.

Sei $a, n > 1$ mit $a^{n-1} \equiv 1 \pmod n$ aber $a^{(n-1)/p} \not\equiv 1 \pmod n$ für alle Primzahlen $p \mid (n-1)$.

Zeigen Sie, dass n eine Primzahl ist.

Hinweis: Berechnen Sie die Ordnung von a in $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

(4 Punkte)

Aufgabe 2.

Seien $m, n > 1$ mit $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (als abelsche Gruppen).

Zeigen Sie, dass $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$.

Hinweis: Für $d = \mathrm{ggT}(m, n)$, wieviele Elemente x gibt es, mit $dx = 0$?

(4 Punkte)

Aufgabe 3.

Die Pfeilschreibweise von Knuth ist durch $x{\uparrow\uparrow}n := \underbrace{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}_{n}$, also ist $2{\uparrow\uparrow}4 = 2^{2^{2^2}} = 65536$.

Berechnen Sie $3{\uparrow\uparrow}21 \pmod{100}$.

Hinweis: Mit Hilfe des chinesischen Restsatzes genügt es, mit Primpotenzen zu arbeiten. Man sollte auch der Satz von Euler verwenden.

(4 Punkte)

Aufgabe 4.

Seien $m, n > 1$.

(a) Was sind die möglichen Untergruppen von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$?

(b) Was sind die möglichen Bilder von Gruppen Homomorphismen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$?

(c) Wie viele Gruppen Homomorphismen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ gibt es insgesamt?

(d) Wie viele davon sind Ringhomomorphismen?

(je 2 Punkte)

Abgabe: Montag 3. Juni, bis 12 Uhr in die Postfächer der Tutoren im V3–126