Aufgabe 1 (4 Punkte)

Betrachte die folgenden Vektoren $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{Z}/7^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- (a) Bringe die Matrix, deren j -te Spalte durch v_j gegeben ist, mit dem Gauß-Algorithmus in Zeilenstufenform und beurteile anhand der resultierenden Matrix, ob die Menge $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subseteq \mathbb{Z}/7^4$ linear unabhängig und/oder ein Erzeugendensystem ist.
- (a) Falls die Menge eine Basis ist, beschreibe die Einheitsvektoren $e_1, e_2, e_3, e_4 \in \mathbb{Z}/7^4$ als Linearkombination der v_j . Falls die Menge keine Basis ist, finde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{Z}/7^4$, sodass $\sum_{j=1}^4 \lambda_j \cdot v_j = 0$ und nicht alle $\lambda_j = 0$ sind, sowie einen Vektor $v \in \mathbb{Z}/7^4$, der sich nicht als Linearkombination der v_j darstellen lässt.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei K ein Körper, $1 \leq k, n$ und $A \in \text{Mat}(k, n, K)$. Zeige, dass die folgenden Zahlen gleich sind:

- (1) Die Dimension des Unterraumes von K^n , der von den Zeilenvektoren $z_i = (A_{i,1} \ \cdots \ A_{i,n})$ für $i = 1, \dots, k$ aufgespannt wird,
- (2) Die Dimension des Unterraumes von K^k , der von den Spaltenvektoren $s_j = (A_{1,j} \ \cdots \ A_{k,j})$ für $j = 1, \dots, n$ aufgespannt wird.

Hinweis: Die Behauptung lässt sich mithilfe dem Gauß-Algorithmus auf Matrizen in Zeilenstufenform reduzieren. Es sind aber auch andere Argumente möglich!

Bemerkung. Die zweite Zahl ist gerade der Rang der Matrix A , den wir als $\dim_K(\text{Im}(L(A)))$ definiert haben.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei K ein Körper, W ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum und $U, V \subseteq W$ Untervektorräume von W . Zeige:

$$\dim_K(U + V) = \dim_K(U) + \dim_K(V) - \dim_K(U \cap V).$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Sei K ein Körper, $d \in \mathbb{N}$ und $U, V \subseteq K^d$ Untervektorräume. Sei weiterhin $B = \{b_1, \dots, b_m\} \subseteq U$ eine Basis von U und $C = \{c_1, \dots, c_n\} \subseteq V$ eine Basis von V . Das Ziel dieser Aufgabe ist es, eine Basis von $U \cap V$ zu finden. Wir definieren dafür die Matrix $A = (B|C) \in \text{Mat}(d, m+n, K)$, deren i -te Spalte gegeben ist durch b_i , falls $i \leq m$, und $-c_{i-m}$, falls $i > m$.

- (a) Betrachte die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \varrho : \text{Ker}(L(A)) &\longrightarrow K^d \\ x &\longmapsto \sum_{i=1}^m b_i \cdot x_i. \end{aligned}$$

Zeige: Das Bild von ϱ liegt in $U \cap V$, und darauf eingeschränkt ist ϱ ein Isomorphismus $\text{Ker}(L(A)) \rightarrow U \cap V$.

Bemerkung. Insbesondere lässt sich also wie folgt eine Basis von $U \cap V$ bestimmen: Zunächst wird A in strikte Zeilenstufenform gebracht. Daran kann (nach II.1.5) eine lineare Bijektion $\varphi : K^{d-l} \rightarrow L(A; 0)$ abgelesen werden, die (nach II.4.10) genau eine Basis bestimmt, nämlich $\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_{d-l})\}$. Dann ist durch $\{(\varrho \circ \varphi)(e_1), \dots, (\varrho \circ \varphi)(e_{d-l})\}$ eine Basis von $U \cap V$ gegeben.

(b) Sei nun $K = \mathbb{Z}/5^4$, $U = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle_K$ und $V = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle_K$ mit

$$b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ sowie } c_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimme eine Basis von $U \cap V$.