Aufgabe 1

(a) Wir beginnen mit dem Gauß-Algorithmus auf V, und fassen mehrere Schritte zusammen:

$$\begin{pmatrix}4&4&5&1\\5&1&5&1\\1&2&3&4\\5&4&0&3\end{pmatrix}\overset{\substack{II-3I\\III-2I\\IV-3I}}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}4&4&5&1\\0&3&4&5\\0&1&0&2\\0&6&6&0\end{pmatrix}\overset{\substack{III-5II\\IV-2II}}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}4&4&5&1\\0&3&4&5\\0&0&1&5\\0&0&5&4\end{pmatrix}\overset{IV-5\cdot III}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}4&4&5&1\\0&3&4&5\\0&0&1&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}=:Z$$

Nun enthält Z (also die Matrix in Zeilenstufenform) die letzte Spalte keine neue Stufe, also gibt es eine lineare Bijektion zwischen dem Kern der Matrix (also der Lösungsmenge $L(V;0)$) und dem Vektorraum $\mathbb{Z}/7^1$. Insbesondere enthält der Kern also nichttrivale Elemente: Das heißt gerade, dass die Gleichung $\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 v_3+\lambda_4 v_4=0$ nichttriviale Lösungen $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\in\mathbb{Z}/7$ hat. (Beispielsweise ist $3v_1+v_2+3v_4=v_3$, also ist $\lambda_1=3,\lambda_2=1,\lambda_3=-1=6,\lambda=4=3$ eine Lösung.) Somit ist die Menge $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ *nicht linear unabhängig.*

Weiterhin ist die letzte Zeile von Z eine Nullzeile, also ist $L(Z)$ nicht surjektiv. Dann kann auch $L(V)$ nicht surjektiv sein: Jedes $b\in\mathbb{Z}/7^4$, das nicht im Bild von $L(Z)$ liegt, lässt sich mit den Inversen der Zeilenumformungen aus dem Gauß-Algorithmus oben in ein $b'\in\mathbb{Z}/7^4$ umformen, das nicht im Bild von $L(V)$ liegt. Somit ist $\langle v_1,v_2,v_3,v_4\rangle_{\mathbb{Z}/7}=\mathrm{Im}(L(V))\neq\mathbb{Z}/7^4$, die Menge ist also auch *kein Erzeugendensystem.*

(b) Da die Menge keine Basis ist, suchen wir zunächst nichttriviale $\lambda_1,\dots,\lambda_4\in\mathbb{Z}/7^4$, sodass $\sum_{j=1}^4\lambda_j\cdot v_j=0$: Das heißt gerade, dass $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_4)\in L(V;0)$ ist. Mit den Umformungen oben ist $L(V;0)=L(Z;0)$. Um das Gleichungssystem zu lösen, bringen wir Z in strikte Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix}4&4&5&1\\0&3&4&5\\0&0&1&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{I+II}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}4&0&2&6\\0&3&4&5\\0&0&1&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{\substack{I-2III\\II+3III}}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}4&0&0&3\\0&3&0&6\\0&0&1&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{\substack{I\cdot2\\II\cdot5}}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}1&0&0&6\\0&1&0&2\\0&0&1&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Insbesondere können wir also $\lambda_4\in\mathbb{Z}/7$ frei wählen, und erhalten dann

$$\begin{aligned}\lambda_1&=-6\cdot\lambda_4=\lambda_4\\\lambda_2&=-2\cdot\lambda_4=5\cdot\lambda_4\\\lambda_3&=-5\cdot\lambda_4=2\cdot\lambda_4.\end{aligned}$$

Alle Lösungen sind gegeben durch:

$$L(A;0)=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\5\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\4\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\6\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\6\\1\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\4\\3\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6\\2\\5\\6\end{pmatrix}\right\}$$

Davon sind alle bis auf die erste valide Antworten.

Ein Vektor $b\in\mathbb{Z}/7^4$ ist genau dann keine Linearkombination der v_j, wenn $L(V;b)=\emptyset$ ist. Wir wissen, dass $L(Z;b')=\emptyset$ genau dann, wenn $b'_4\neq0$ ist. Wir wählen also

$$b':=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\in\mathbb{Z}/7^4.$$

Wir bemerken nun, dass nur alle Zeilenoperationen, die in (a) verwendet wurden, b' unverändert lassen. Insbesondere ist also $L(V;b')=L(Z;b')=\emptyset$. (Warnung: Es sind bei weitem nicht alle b mit $L(V;b)=\emptyset$ von der Form $b=(0,0,0,a)$ für ein $a\neq0$: Es gibt 6 solche Vektoren. Aber da das Bild von $L(V)$ Dimension 3 hat, hat $\mathbb{Z}/7^4\setminus\mathrm{Im}(L(V))$ genau $7^4-7^3=2058$ Elemente. Aus Platzgründen listen wir nicht alle auf.)

Aufgabe 2

Sei zunächst A' eine Matrix, die aus A durch eine elementare Zeilenoperation gewonnen wurde. Dann ändern sich die jeweiligen Zahlen nicht: Wir notieren für eine Matrix B mit ζ_B die Dimension des von den Zeilen von B aufgespannten Unterraums, und mit σ_B die Dimension des von den Spalten von B aufgespannten Unterraums. Dann behaupten wir, dass $\zeta_A = \zeta_{A'}$ und $\sigma_A = \sigma_{A'}$. Um dies zu beweisen, notieren wir weiterhin die Zeilenvektoren von A' mit

$$z'_i = \begin{pmatrix} A'_{i,1} & \cdots & A'_{i,n} \end{pmatrix} \text{ für } i = 1, \ldots, k,$$

Und die Spaltenvektoren

$$s'_j = \begin{pmatrix} A'_{1,j} & \cdots & A'_{k,j} \end{pmatrix} \text{ für } j = 1, \ldots, n.$$

Für $\zeta_A = \zeta_{A'}$ unterscheiden wir die verschiedenen Typen von Zeilenoperationen:

Typ I: Falls $A' = s^{\lambda}_{a,c}(A)$ ist, so ist $z'_i = z_i$ für $i \neq c$, und $z'_c = z_c + \lambda z_a$. Dann ist jede Linearkombination von z'_i auch eine von z_i:

$$\sum_{i=0}^{k} \lambda_i z'_i = \sum_{\substack{i=0\\ i\neq c}}^{k} \lambda_i z'_i + \lambda_c z'_c = \sum_{\substack{i=0\\ i\neq c}}^{k} \lambda_i z_i + \lambda_c (z_c + \lambda z_a) = \sum_{\substack{i=0\\ i\neq a,c}}^{k} \lambda_i z_i + (\lambda_a + \lambda_c \cdot \lambda) z_a + \lambda_c z_c.$$

Genauso ist umgekehrt $z_c = z'_c - \lambda z'_a$ und somit jede Linearkombination von z_i auch eine von z'_i:

$$\sum_{i=0}^{k} \lambda_i z_i = \sum_{\substack{i=0\\ i\neq a,c}}^{k} \lambda_i z_i + \lambda_a z_a + \lambda_c z_c = \sum_{\substack{i=0\\ i\neq a,c}}^{k} \lambda_i z'_i + \lambda_a z'_a + \lambda_c (z'_c - \lambda z'_a) = \sum_{\substack{i=0\\ i\neq a,c}}^{k} \lambda_i z'_i + (\lambda_a - \lambda_c \cdot \lambda) z'_a + \lambda_c z'_c$$

Typ II: Falls $A' = m^{\lambda}_a(A)$ ist, so ist $z'_i = z_i$ für $i \neq a$, und $z'_a = \lambda \cdot z_a$. Insbesondere ist dann auch (da λ eine Einheit ist) $z_a = \lambda^{-1} \cdot z'_a$, also lässt sich jede Linearkombination der z_i als eine der z'_i schreiben (indem der Koeffizient vor z_a mit λ^{-1} multipliziert wird) und umgekehrt (indem der Koeffizient vor z'_a mit λ multipliziert wird).

Typ III: Falls $A' = t_{a,c}(A)$ ist, so ist $z'_i = z_i$ für $i \neq a, c$, $z'_a = z_c$ und $z'_c = z_a$. Insbesondere ist also jede Linearkombination der z_i bereits eine der z'_i und umgekehrt.

Für $\sigma_A = \sigma_{A'}$ bemerken wir, dass wir in Aufgabe 3 auf Blatt 8 gezeigt haben, dass eine elementare Zeilenoperation f gilt, dass

$$\big(L(A)\big)(x) = b \Leftrightarrow \big(L(f(A))\big)(x) = f(b).$$

Insbesondere ist also f ist eine lineare Bijektion $f : \mathrm{Im}(L(A)) \to \mathrm{Im}(L(f(A)))$. Als solche erhält es die Dimension, und es ist

$$(1) = \dim_K\big(\mathrm{Im}(L(A))\big) = \dim_K\big(\mathrm{Im}(L(f(A)))\big) = (1').$$

Sei nun Z eine Matrix in strikter Zeilenstufenform, die durch elementare Zeilenumformungen aus A gewonnen wurde. Dann ist mit der obigen Beobachtung induktiv $\zeta_A = \zeta_Z$ und $\sigma_A = \sigma_Z$. Diese Dimensionen lassen sich an Z nun aber ablesen: Sei l der Zeilenrang von Z und $r : \{1, \ldots, r\} \to \{1, \ldots, n\}$ die Zeugenfunktion.

- Die ersten l Zeilen von Z sind linear unabhängig: Falls für $\lambda_1, \ldots, \lambda_l \in K$ gilt, dass

  $$\sum_{i=1}^{l} \begin{pmatrix} Z_{i,1} & \cdots & Z_{i,n} \end{pmatrix} \cdot \lambda_i = 0,$$

  so folgt dass für alle i $\lambda_i = 0$ sein muss: $Z_{i,r(i)}$ ist der Eintrag mit dem i-ten Pivot-Element. Somit ist $Z_{s,r(1)} = 0$ für $s \neq i$, und somit

  $$0 = \sum_{s=1}^{l} \lambda_s Z_{s,r(i)} = \sum_{s\neq i} \lambda_s \cdot \underbrace{Z_{s,r(i)}}_{=0} + \lambda_i \cdot \underbrace{Z_{i,r(i)}}_{\neq 0},$$

  was $\lambda_i = 0$ impliziert.

  Da die anderen Zeilen von Z alle 0 sind, bilden die ersten l Zeilen also eine Basis des von den Zeilen aufgespannten Umterraums: Insbesondere ist also $\zeta_Z = l$.

- Mit einem analogen Argument sind die Spalten $\{r(1),\dots,r(l)\}$ linear unabhängig: Falls für $\lambda_1,\dots,\lambda_l \in K$ gilt, dass

  $$\sum_{i=1}^{l} \begin{pmatrix} Z_{1,r(i)} & \cdots & Z_{k,r(i)} \end{pmatrix} \cdot \lambda_i = 0,$$

  so folgt dass für alle i $\lambda_i = 0$ sein muss: $Z_{i,r(i)}$ ist der Eintrag mit dem i-ten Pivot-Element, also ist, weil Z in strikter Zeilenstufenform ist, $Z_{s,r(i)} = 0$ für $s \neq i$, und somit

  $$0 = \sum_{s=1}^{l} \lambda_s Z_{i,r(s)} = \sum_{s \neq i} \lambda_s \cdot \underbrace{Z_{i,r(s)}}_{=0} + \lambda_i \cdot \underbrace{Z_{i,r(i)}}_{\neq 0},$$

  was wieder $\lambda_i = 0$ impliziert.

  Da alle Spalten von Z in den Koordinaten $l+1,\dots,k$ mit 0 besetzt sind, liegt der von den Spalten aufgespannte Raum in dem l-dimensionalen Unterraum von K^k, der von den ersten l Einheitsvektoren $e_1,\dots,e_l$ aufgespannt wird. Somit sind die Spalten $\{r(1),\dots,r(l)\}$ eine maximale linear unabhängige Menge, also eine Basis. Damit ist $\sigma_Z = l$.

Zusammengefasst haben wir nun folgendes gezeigt:

$$\zeta_A = \zeta_Z = l = \sigma_Z = \sigma_A.$$

Dabei ist ζ_A die Zahl aus (1) und σ_A die Zahl aus (2), also sind wir fertig.

Aufgabe 3

Sei B eine Basis des Schnittes $U \cap V$. Dann können wir mit dem Steinitz'schen Ergänzungssatz (Satz II.4.21) Teilmengen $B_U \subset U \backslash B$ und $B_V \subset V \backslash B$ finden, sodass $B \cup B_U$ eine Basis von U ist und $B \cup B_V$ eine Basis von V ist. Wir behaupten nun, dass $B_U \cap B_V = \emptyset$ und dass $B_U \cup B \cup B_V$ eine Basis von $U + V$ ist.

Für die erste Behauptung sei $b \in B_U$: Dann ist $b \in U$. Wir behaupten, dass $b \notin V$: Ansonsten wäre $b \in U \cap V$, also ließe sich b als Linearkombination von Vektoren in B darstellen. Aber das ist ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $B \cup \{b\} \subseteq B \cup B_U$. Insbesondere ist also $B \notin B_V \subseteq V$.

Für die zweite Behauptung sehen wir zunächst, dass $B_U \cup B \cup B_V$ ein Erzeugendensystem von $U + V$ ist: Für $x \in U + V$ gibt es $u \in U$ und $v \in V$ mit $x = U + V$. Dann lässt sich u als Linearkombination der Vektoren in $B \cup B_U$ darstellen, genauso v als Linearkombination in $B \cup B_V$. Zusammen gibt das eine Darstellung von $x = u + v$ als Linearkombination von Vektoren aus $B_U \cup B \cup B_V$.

Für die lineare Unabhängigkeit von $B_U \cup B \cup B_V$ sei

$$0 = \sum_i \lambda_i u_i + \sum_j \mu_j b_j + \sum_k \nu_k v_k$$

für $u_i \in B_U$, $b_j \in B$ und $v_k \in B_V$. Wir formen um zu

$$y := \sum_i (-\lambda_i) u_i + \sum_j (-\mu_j) b_j = \sum_k \nu_k v_k.$$

Dann ist die y einerseits eine Linearkombination von Vektoren in $B_U \cup B$, also in U, und andererseits in V, somit ist $y \in U \cap V$. Insbesondere hat y eine eindeutige Darstellung in der Basis B, also $y = \sum_j \mu'_j b_j$. Da die Darstellung von y als Element von U in der Basis $B_U \cup B$ ebenfalls eindeutig ist, folgt $\mu'_j = \mu_j$ und $\lambda_i = 0$. Eingesetzt in die ursprüngliche Gleichung folgt

$$0 = \sum_j \mu_j b_j + \sum_k \nu_k v_k,$$

und da $B \cup B_V$ eine Basis von V, und somit linear unabhängig ist, folgt dass alle $\mu_j = 0$ und ν_k sind.

Wir haben also gezeigt, dass $B_U \cup B \cup B_V$ eine Basis ist. Da W endlich-dimensional ist, gilt dies auch für die Unterräume $U \cap V, U, V$ und $U+V$. Insbesondere haben diese also eine Dimension, und diese ist durch die Anzahl der Elemente in jeder Basis gegeben. Dann ist

$$\begin{aligned}\dim_K(U+V) &= |B_U \cup B \cup B_V| = |B_U| + |B| + |B_V| = (|B_U| + |B|) + (|B_V| + |B|) - |B| \\ &= (|B_U \cup B|) + (|B_V \cup B|) - |B| = \dim_K(U) + \dim_K(V) - \dim_K(U \cap V).\end{aligned}$$

(Alternativ lässt sich diese Aufgabe auch mit der Dimensionsformel lösen: Dafür betrachtet man die lineare Abbildung

$$\begin{aligned}\varphi : U \oplus V &\longrightarrow W \\ (u,v) &\longmapsto u+v,\end{aligned}$$

und erkennt, dass ihr Kern isomorph zu $U \cap V$ ist und ihr Bild durch $U+V$ gegeben ist.)

Aufgabe 4

(a) Sei $x \in \operatorname{Ker}\big(L(A)\big)$. In anderen Worten gilt dann

$$\begin{aligned}\big(L(A)\big)(x) = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot x_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} (-c_{i-m}) \cdot x_i = 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot x_i = \sum_{i=m+1}^{m+n} c_{i-m} \cdot x_i.\end{aligned}$$

Insbesondere ist also $\varrho(x) = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot x_i$ ein Element in U, weil es eine Linearkombination der b_i ist, und mit obiger Gleichung auch ein Element in V als Linearkombination der c_i. In anderen Worten gilt für alle $x \in \operatorname{Ker}\big(L(A)\big)$, dass $\varrho(x) \in U \cap V$.

Um zu sehen, dass $\varrho : \operatorname{Ker}\big(L(A)\big) \to U \cap V$ ein Isomorphismus ist, müssen wir Bijektivität zeigen:

- Da ϱ linear ist, reicht es für die Injektivität zu zeigen, dass $\operatorname{Ker}(\varrho) = 0$ ist. Sei also $x \in \operatorname{Ker}\big(L(A)\big)$ mit $\varrho(x) = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot x_i = 0$. Da b_i eine Basis von U und somit linear unabhängig ist, folgt daraus $x_i = 0$ für $1 \le i \le m$. Da aber $x \in \operatorname{Ker}\big(L(A)\big)$ ist, folgt nun, dass

$$0 = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot x_i = \sum_{i=m+1}^{m+n} c_{i-m} \cdot x_i.$$

  Da die c_i eine Basis von V sind, folgt genauso, dass $x_i = 0$ für $m+1 \le i \le m+n$, also ist $x = 0$.

- Für Surjektivität sei $y \in U \cap V$. Als Vektor in U besitzt y eine Darstellung $y = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot \lambda_i$ bezüglich B, und als Vektor in V besitzt y eine Darstellung $y = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \mu_i$ bezüglich C. Betrachte nun $x \in K^{m+n}$ mit $x_i = \lambda_i$ für $1 \le i \le m$, und $x_i = \mu_{i-m}$ für $m+1 \le i \le m+n$. Dann ist

$$\big(L(A)\big)(x) = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot \lambda_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} (-c_{i-m}) \cdot \mu_{i-m} = 0,$$

  also ist $x \in \operatorname{Ker}\big(L(A)\big)$, und per Konstruktion ist

$$\varrho(x) = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot \lambda_i = y,$$

  somit ist ϱ surjektiv auf $U \cap V$.

- Wir folgen der Bemerkung: Um eine Basis von $U \cap V$ zu bestimmen, bestimmen wir zuerst eine Basis von $\operatorname{Ker}\big(L(A)\big)$. Dafür bringen wir A in Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 3 & -2 & -0 & -0 \\ 0 & 2 & 4 & -0 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -3 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & -0 & -4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{III-1\cdot I \\ IV-2\cdot I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{IV-2\cdot II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right) \overset{IV-1\cdot III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{I-1\cdot II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 4 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{I-2\cdot III \\ II-2\cdot III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{II-3\cdot IV \\ III-1\cdot IV}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{I\cdot 2 \\ II\cdot 3 \\ III\cdot 3 \\ IV\cdot 4}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Da $\operatorname{Ker}\big(L(A)\big) = L(A;0)$ ist, wollen wir also das Gleichungssystem $\big(L(A)\big)(x) = 0$ lösen. Dafür können wir die letzten beiden Koordinaten x_5, x_6 frei wählen, diese bestimmen dann

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= -x_5 = 4x_5 \\ x_3 &= -x_5 - x_6 = 4x_5 + 4x_6 \\ x_4 &= -4x_6 = x_6. \end{aligned}$$

Wir erhalten also eine Bijektion

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z}/5^2 &\longrightarrow \operatorname{Ker}\big(L(A)\big) \\ \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot s + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t, \end{aligned}$$

insbesondere sind die Vektoren $\varphi(e_1)$ und $\varphi(e_2)$ eine Basis von $\operatorname{Ker}\big(L(A)\big)$. Diese wird nun wiederum von dem Isomorphismus ϱ auf eine Basis von $U \cap V$ gesendet. Insgesamt hat $U \cap V$ also Dimension 2, und eine Basis ist gegeben durch die beiden Vektoren

$$\varrho\left(\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \varrho\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 4 + b_3 \cdot 4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\varrho\left(\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \varrho\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 0 + b_3 \cdot 4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$