Da dieses Blatt einen Tag später hochgeladen wurde, ist die Abgabe wieder bis Freitag (28.6.) um 14:00 möglich.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{24} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{12} & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{24} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \in \text{Mat}(4, 4, \mathbb{Q}).$$

Bestimme die zu A inverse Matrix A^{-1} .

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum und $\varphi : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (1) $\text{rk}(\varphi) < \dim_K(V)$,
- (2) φ ist ein *Links-Nullteiler* in $\text{Hom}_K(V, V)$, das heißt: Es existiert ein $\psi : V \rightarrow V$, $\psi \neq 0$, sodass $\varphi \circ \psi = 0$,
- (3) φ ist ein *Rechts-Nullteiler* in $\text{Hom}_K(V, V)$, das heißt: Es existiert ein $\psi : V \rightarrow V$, $\psi \neq 0$, sodass $\psi \circ \varphi = 0$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Betrachte die Mengen $B = \{b_1, b_2, b_3\} \in \mathbb{Z}/5^3$ und $C = \{c_1, c_2, c_3\} \in \mathbb{Z}/5^3$ mit

$$b_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } c_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Verifiziere, dass B und C Basen von $\mathbb{Z}/5^3$ sind.

(b) Betrachte zusätzlich die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

sowie die assoziierte lineare Abbildung $L(A) : \mathbb{Z}/5^3 \rightarrow \mathbb{Z}/5^3$. Bestimme die Darstellungsmatrix $M(L(A), b, c)$, wobei b und c die obigen Nummerierungen der Basen B und C sind, d.h. $b(i) = b_i$ und $c(i) = c_i$ für $i = 1, 2, 3$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum. Wir notieren mit $V^* = \text{Hom}_K(V, K)$ den *Dualraum* von V . Für eine Basis $B = \{b_1, \dots, b_n\} \subseteq V$ definieren wir $B^* = \{\beta_1, \dots, \beta_n\} \subseteq V^*$, wobei für $i = 1, \dots, n$ $\beta_i : V \rightarrow K$ die eindeutige lineare Abbildung ist, für die gilt:

$$\beta_i(b_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Dann wissen wir aus Korollar II.7.2, dass B^* eine Basis ist (Es ist $\beta_i = \varphi_{i,1}$, mit $\{1\}$ als Basis von K).

Sei weiterhin $1 \leq k, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \text{Mat}(k, n, K)$. Wir definieren die *transponierte* Matrix $A^T \in \text{Mat}(n, k, K)$ von A als

$$(A^T)_{i,j} = A_{j,i},$$

in anderen Worten: A^T wird aus A durch das Vertauschen von Zeilen und Spalten erhalten.

- (a) Sei nun $\varphi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen und b und c nummerierte Basen von V und W . Die zu φ duale Abbildung ist definiert als

$$\begin{aligned}\varphi^* : W^* &\longrightarrow V^* \\ (f : W \rightarrow K) &\longmapsto (f \circ \varphi : V \rightarrow K).\end{aligned}$$

Sei β die nummerierte duale Basis zu b wie oben und γ die nummerierte duale Basis zu c (also $\gamma_i(c_j)$ ist 1, falls $i = j$ ist, und 0 sonst). Zeige:

$$M(\varphi^*, \gamma, \beta) = (M(\varphi, b, c))^T.$$

- (b) Zeige: Für $A \in \text{Mat}(k, n, K)$. und $B \in \text{Mat}(n, m, K)$ gilt

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$$