Aufgabe 1

Wir formen A mit elementaren Zeilenoperationen zur Identitätsmatrix $\mathbb{1}_4 \in \mathbb{Q}$ um und halten das Produkt der dabei verwendeten Zeilenoperationen fest, indem wir A um eine Identitätsmatrix erweitern:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{24} & -\frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{12} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{24} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{I\cdot 6\\ II\cdot 24\\ III\cdot 12\\ IV\cdot 24}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -3 & 0 & 2 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ -18 & 6 & 5 & -6 & 0 & 24 & 0 & 0 \\ 18 & -6 & -5 & 12 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ -6 & 6 & 1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 24 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{III+II\\ II-6\cdot I\\ IV-2\cdot I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -3 & 0 & 2 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & 12 & -36 & 24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 24 & 12 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 & -12 & 0 & 0 & 24 \end{array}\right) \overset{IV-II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -3 & 0 & 2 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & 12 & -36 & 24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 24 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -12 & 24 & -24 & 0 & 24 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{III\leftrightarrow IV\\ III\cdot\frac{1}{4}\\ IV\cdot\frac{1}{6}}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -3 & 0 & 2 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & 12 & -36 & 24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 & -6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{I-2\cdot III\\ II+7\cdot III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -3 & 0 & 0 & 3 & -6 & 12 & 0 & -12 \\ 0 & 6 & 0 & -9 & 6 & -18 & 0 & 42 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 & -6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{I-3\cdot IV\\ II+9\cdot IV\\ III+3\cdot IV}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -3 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & -6 & -12 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 6 & 18 & 18 & 42 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{I\cdot(-\frac{1}{3})\\ II\cdot\frac{1}{6}}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Somit ist die inverse Matrix A^1 gegeben durch

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 7 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

(1)⇒(2): Sei $\mathrm{rk}(\varphi) < \dim_K(V)$. Dann ist mit der Dimensionsformel

$$k := \dim_K(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim_K(V) - \dim_K(\mathrm{Im}(\varphi)) = \dim_K(V) - \mathrm{rk}(\varphi) > 0.$$

Wir wählen eine Basis $\{b_1, \dots, b_k\}$ von $\mathrm{Ker}(\varphi)$, und ergänzen diese zu einer Basis $\{b_1, \dots, b_k, b_{k+1}, \dots, b_n\}$ von V. Dann definieren wir $\psi : V \to V$ wie folgt:

$$\psi(b_i) = \begin{cases} b_i & i \leq k \\ 0 & i > k. \end{cases}$$

Dann ist für jedes $v \in V$ $\psi(v) \in \langle b_1, \dots, b_k \rangle_K = \mathrm{Ker}(\varphi)$, also ist $\varphi \circ \psi = 0$. Andererseits ist aber, da $k > 0$, $\psi(b_1) = b_1 \neq 0$, also ist $\psi \neq 0$.

(2)⇒(1): Sei $\psi \neq 0$ mit $\varphi \circ \psi = 0$. Da $\psi \neq 0$ gibt es ein $v \in V$, sodass $\psi(v) \neq 0$. Da $\varphi \circ \psi = 0$, ist $\psi(v) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Insbesondere ist also $\mathrm{Ker}(\varphi) \neq 0$, somit ist V nicht injektiv und mit Korollar II.5.5 somit auch nicht surjektiv: Dann ist $\mathrm{rk}(\varphi) = \dim_K(\mathrm{Im}(\varphi)) < \dim_K(V)$.

(1)⇒(3): Sei $\mathrm{rk}(\varphi) < \dim_K(V)$. Wir notieren $r := \mathrm{rk}(\varphi) = \dim_K(\mathrm{Im}(\varphi))$ und wählen eine Basis $\{b_1, \dots, b_r\}$ von $\mathrm{Im}(\varphi)$. Diese können wir zu einer Basis $\{b_1, \dots, b_r, b_{r+1}, \dots, b_n\}$ von V ergänzen, wobei nach Annahme $r < n$ ist. Wir definieren $\psi : V \to V$ wie folgt:

$$\psi(b_i) = \begin{cases} 0 & i \leq r \\ b_i & i > r. \end{cases}$$

Dann ist für jedes $v \in V$ $\varphi(v) \in \langle b_1, \dots, b_r \rangle_K \subseteq \mathrm{Ker}(\psi)$, also ist $\psi \circ \varphi = 0$. Andererseits ist aber, da $r < n$, $\psi(b_n) = b_n \neq 0$, also auch $\psi \neq 0$.

(3)⇒(1): Sei $\psi \neq 0$ mit $\psi \circ \varphi = 0$. Da $\psi \neq 0$ gibt es ein $v \in V$, sodass $\psi(v) \neq 0$. Demnach ist $v \notin \operatorname{Im}(\varphi)$. Insbesondere ist dann

$$\operatorname{rk}(\varphi) = \dim_K(\operatorname{Im}(\varphi)) < \dim_K(V).$$

(Beispielsweise, weil für eine Basis B von $\operatorname{Im}(\varphi)$ die Menge $B \cup \{v\}$ wieder linear unabhängig ist, also in einer Basis von V enthalten sein muss.)

Aufgabe 3

(a) Wir bilden die Matrizen, deren Spaltenvektoren gerade durch die Vektoren in B bzw. C gegeben sind, und bringen sie mit dem Gauß-Algorithmus in Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{II-I \\ III-I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \overset{III-3\cdot II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{II-2\cdot I \\ III-3\cdot I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{III-3\cdot II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da es keine Nullzeilen gibt, sind sowohl B als auch C Erzeugendensysteme, und da beide 3 Elemente haben, folgt, dass sie Basen sind.

(b) Die Matrix $M\big(L(A), b, c\big)$ kann mit Beobachtung II.7.5 als das folgende Produkt berechnet werden, wobei e die Standardbasis von $\mathbb{Z}/5^3$ bezeichnet:

$$M\big(L(A), b, c\big) = M\big(\operatorname{id}, e, c\big) \cdot M\big(L(A), e, e\big) \cdot M\big(\operatorname{id}, b, e\big)$$

Die einzelnen Faktoren lassen sich nun schnell bestimmen:

- $M(\operatorname{id}, b, e)$ ist die Basiswechselmatrix von b zu e, also sind ihre Spalten gerade die Basisvektoren aus b: Die i-te Spalte beschreibt gerade die Darstellung des i-ten Basisvektors b_i bezüglich der Standardbasis e, das sind aber genau die Einträge von b_i.
- $M\big(L(A), e, e\big) = A$ nach Definition.
- Für $M(\operatorname{id}, e, c)$ verwenden wir, dass $M(\operatorname{id}, e, c) = M(\operatorname{id}, c, e)^{-1}$. Dabei sind die Spalten von $M(\operatorname{id}, c, e)$ wieder durch die Basisvektoren aus c gegeben. Wir müssen diese Matrix also nur noch invertieren. Dabei gehen wir wie in Aufgabe 1 vor:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{II-2\cdot I \\ III-3\cdot I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{III-3\cdot II \\ I-3\cdot II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{I-3\cdot III \\ II-3\cdot III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{I\cdot 2 \\ II\cdot 3}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

  Somit ist

$$M\big(\operatorname{id}, e, c\big) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt ist also

$$M\big(L(A), b, c\big) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{M(\operatorname{id}, e, c)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{M(\operatorname{id}, b, e)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

(a) Per Definition sind die Einträge $\left(M(\varphi^*,\gamma,\beta)\right)_{i,j}$ eindeutig bestimmt durch folgende Gleichung:

$$\varphi^*(\gamma_j) = \sum_{i=1}^{\dim_K(V)} \beta_i \cdot \left(M(\varphi^*,\gamma,\beta)\right)_{i,j}.$$

Insbesondere folgt für ein fixes i:

$$\begin{aligned}\left(\varphi^*(\gamma_j)\right)(b_i) &= \left(\sum_{s=1}^{\dim_K(V)} \beta_s \cdot \left(M(\varphi^*,\gamma,\beta)\right)_{s,j}\right)(b_i)\\ &= \sum_{s=1}^{\dim_K(V)} \beta_s(b_i)\cdot\left(M(\varphi^*,\gamma,\beta)\right)_{s,j} = \left(M(\varphi^*,\gamma,\beta)\right)_{i,j}.\end{aligned}$$

Andererseits ist $\varphi^*(\gamma_j) = \gamma_j \circ \varphi$, und somit

$$\begin{aligned}\left(\varphi^*(\gamma_j)\right)(b_i) &= \gamma_j \circ \varphi(b_i)\\ &= \gamma_j\left(\sum_{t=1}^{\dim_K(W)} c_t \cdot \left(M(\varphi,b,c)\right)_{t,i}\right)\\ &= \sum_{t=1}^{\dim_K(W)} \gamma_j(c_t)\cdot\left(M(\varphi,b,c)\right)_{t,i} = \left(M(\varphi,b,c)\right)_{j,i}.\end{aligned}$$

Zusammen folgt, dass

$$\left(M(\varphi^*,\gamma,\beta)\right)_{i,j} = \left(M(\varphi,b,c)\right)_{j,i},$$

also ist $M(\varphi^*,\gamma,\beta) = \left(M(\varphi,b,c)\right)^T$.

(b) Die Aussage lässt sich aus (a) herleiten oder direkt zeigen: Für den direkten Weg sei $i = 1,\dots,m$ und $j = 1,\dots,k$. Dann ist

$$\left((A\cdot B)^T\right)_{i,j} = (A\cdot B)_{j,i} = \sum_{l=1}^{k} A_{j,l}B_{l,i} = \sum_{l=1}^{k}\left(A^T\right)_{l,j}\cdot\left(B^T\right)_{i,l} = \sum_{l=1}^{k}\left(B^T\right)_{i,l}\cdot\left(A^T\right)_{l,j} = \left(B^T\cdot A^T\right)_{i,j}$$

Da die beiden Matrizen in allen Einträgen übereinstimmen, ist somit $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$.

Für die Herleitung aus (a) bemerken wir, dass $A = M(L(A),e,e)$ ist, wobei e die nummerierte Standarbasis von K^n bzw. K^k ist. Genauso ist $B = M(L(B),e,e)$. Dann folgt aus (a), dass

$$A^T = M(L(A)^*,\varepsilon,\varepsilon) \text{ und } B^T = M(L(B)^*,\varepsilon,\varepsilon),$$

wobei ε die duale Basis zu e ist.

Weiterhin bemerken wir, dass für zwei lineare Abbildungen $\varphi: V\to W$ und $\psi: W\to U$ gilt, dass $(\psi\circ\varphi)^* = \varphi^*\circ\psi^*$ ist: Falls $f: U\to K$ ein Element von U^* ist, ist

$$(\psi\circ\varphi)^*(f) = f\circ(\psi\circ\varphi) = (f\circ\psi)\circ\varphi = (\varphi^*\left(\psi^*(f)\right) = (\varphi^*\circ\psi^*)(f).$$

Insbesondere ist also

$$\begin{aligned}(A\cdot B)^T &= \left(M(L(A\cdot B),e,e)\right)^T = \left(M(L(A)\circ L(B),e,e)\right)^T\\ &= M\left((L(A)\circ L(B))^*,\varepsilon,\varepsilon\right) = M\left((L(B))^*\circ(L(A))^*,\varepsilon,\varepsilon\right)\\ &= M\left((L(B))^*,\varepsilon,\varepsilon\right)\cdot M\left((L(A))^*,\varepsilon,\varepsilon\right) = \left(M(L(B),e,e)\right)^T\cdot\left(M(L(A),e,e)\right)^T = B^T\cdot A^T\end{aligned}$$

Das ist zwar länger und komplizierter als der direkte Weg, aber dafür hatten wir Spaß und haben etwas über die Komposition von dualen Abbildungen gelernt.