Aufgabe 1 (5 Punkte)

Betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(4, 4, \mathbb{Z}/7).$$

Bestimme nummerierte Basen b, b' von $\mathbb{Z}/7^4$, sodass für die Darstellungsmatrix $M(L(A), b, b')$ gilt:

$$\left(M(L(A), b, b') \right)_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \leq \text{rk}(A) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In anderen Worten: $M(L(A), b, b')$ ist eine Diagonalmatrix, wobei die ersten $\text{rk}(A)$ Einträge auf der Diagonalen 1 sind.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Mat}(2, 2, R).$$

Zeige: A ist genau dann invertierbar, wenn $a \cdot d - b \cdot c \in R$ eine Einheit ist. Berechne in diesem Fall A^{-1} .

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die Permutationsgruppe Σ_n .

(a) Zeige: Σ_n hat $n!$ Elemente.

(b) Sei $1 \leq i < j \leq n$ und $\tau = (i, j) \in \Sigma_n$ eine Transposition. Zeige: τ hat $2(j-i) - 1$ Fehlstände.

Bonus (4 Punkte): Sei $n \geq 2$. Zeige, dass genau $\frac{n!}{2}$ Elemente von Σ_n positives Vorzeichen haben.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(4, 4, \mathbb{Q}).$$

Berechne die Determinante von A mit der Leibniz-Formel.