Aufgabe 1

Zunächst beschreiben wir die Methode: Wir können A durch Zeilen- und Spaltenumformungen auf die gewünschte Form bringen. Dabei können wir die Zeilenumformungen in einer invertierbaren Matrix B' festhalten (ähnlich wie beim Invertieren von Matrizen), und analog die Spaltenumformungen in einer invertierbaren Matrix B festhalten, sodass am Ende $B' \cdot A \cdot B$ in der gewünschten Form ist.

Wenn wir nun A als Darstellungsmatrix von $L(A)$ betrachten (also $A = \mathrm{M}\big(L(A), e, e\big)$), können wir B und B' als Basiswechselmatrizen interpretieren: In anderen Worten, es gibt eindeutig bestimmte nummerierte Basen b und b', sodass $B = \mathrm{M}\big(\mathrm{id}, b, e\big)$ und $B' = \mathrm{M}\big(\mathrm{id}, e, b'\big)$, dann ist

$$B' \cdot A \cdot B = \mathrm{M}\big(\mathrm{id}, e, b'\big) \cdot \mathrm{M}\big(L(A), e, e\big) \cdot \mathrm{M}\big(\mathrm{id}, b, e\big) = \mathrm{M}\big(L(A), b, b'\big).$$

Um die Basis b zu erhalten, verwenden wir II.7.6(3): Die Spalten von $B = \mathrm{M}\big(\mathrm{id}, b, e\big)$ sind gerade durch die Basisvektoren b_i gegeben. Für b' ist ein zusätzlicher Schritt notwendig: Wir invertieren zuerst B', dann sind die Basisvektoren b'_i gerade die Spalten von

$$(B')^{-1} = \mathrm{M}\big(\mathrm{id}, e, b'\big)^{-1} = \mathrm{M}\big(\mathrm{id}, b', e\big).$$

Um uns Arbeit zu sparen, ist es also besser, wenn die Matrix B' so einfach wie möglich ist. Das können wir erreichen, indem wir bevorzugt mit *Spaltenumformungen* verwenden, um A auf die gewünschte Form zu bringen, und erst am Ende die ggf. notwendigen Zeilenumformungen vornehmen.

Nun zur tatsächlichen Rechnung. Wir notieren die Spalten mit i, ii, iii, iv und die Zeilen mit I, II, III, IV. Zunächst nehmen wir Spaltenumformungen vor, um A auf reduzierte *Spaltenstufenform* zu bringen (eine Matrix S ist genau dann in reduzierter Spaltenstufenform, wenn ihre Transponierte S^T in reduzierter Zeilenstufenform ist). Dabei schreiben wir eine Einheitsmatrix *unter* A, auf die wir die entsprechenden Zeilenoperationen auch anwenden. Der Prozess ist also exakt derselbe wie bei den Zeilenumformungen, nur, dass Zeilen und Spalten vertauscht sind:

$$\left(\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{ii-3\cdot i \\ iii-3\cdot i \\ iv-3\cdot i}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 5 \\ \hline 1 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{i-3\cdot ii \\ iii+2\cdot ii \\ iv-3\cdot ii}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 5 & 6 \\ \hline 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{i+1\cdot iii \\ ii+1\cdot iii \\ iv+3\cdot iii}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 5 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 5 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{i\cdot 5 \\ ii\cdot 5 \\ iii\cdot 3 \\ iv\cdot 3}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 5 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 2 \\ 5 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Die Matrix B, die die Spaltenumformungen beschreibt, ist also gegeben durch

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 2 \\ 5 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

dementsprechend ist die Basis b gegeben durch die Spalten, also

$$b_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Nun fehlt nicht mehr viel an *Zeilenumformungen*, um die Matrix in die gewünschte Form zu bringen:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{IV-6\cdot I \\ IV-1\cdot III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 1 \end{array}\right)$$

Somit ist die Matrix B' für die Zeilenumformungen gegeben durch

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Um die dazugehörige Basis b' zu ermitteln, invertieren wir diese Matrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{IV+6\cdot I \\ IV+1\cdot III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Es ist also

$$(B')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

und somit die Basis b' gegeben durch die Spaltenvektoren

$$b_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, b_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_4' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

Sei zunächst angenommen, dass A invertierbar ist. Dann gibt es eine Matrix

$$B = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix},$$

sodass $A \cdot B = B \cdot A = \mathbb{1}_2$ ist: Ausgeschrieben heißt das

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot w + b \cdot y & a \cdot x + b \cdot z \\ c \cdot w + d \cdot y & c \cdot x + d \cdot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wir erhalten also die folgenden vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I}): \quad aw + by = 1 && (\mathrm{II}): \quad ax + bz = 0 \\ &(\mathrm{III}): \quad cw + dy = 0 && (\mathrm{IV}): \quad cx + dz = 1. \end{aligned}$$

Durch Umformung erhalten wir folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} (d \cdot \mathrm{I} - b \cdot \mathrm{III}): \quad & d(aw + by) - b(cw + dy) = d \\ & \Leftrightarrow (ad - bc)w = d \qquad \text{(V)} \\ (c \cdot \mathrm{I} - a \cdot \mathrm{III}): \quad & c(aw + by) - a(cw + dy) = c \\ & \Leftrightarrow -(ad - bc)y = c \qquad \text{(VI)} \\ (b \cdot \mathrm{IV} - d \cdot \mathrm{III}): \quad & b(cx + dz) - d(cx + dz) = b \\ & \Leftrightarrow -(ad - bc)x = b \qquad \text{(VII)} \\ (a \cdot \mathrm{IV} - c \cdot \mathrm{III}): \quad & a(cx + dz) - c(cx + dz) = a \\ & \Leftrightarrow (ad - bc)z = a. \qquad \text{(VIII)} \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned}(z\cdot\mathrm{V}+x\cdot\mathrm{VI}):\qquad &(ad-bc)wz-(ad-bc)xy=dz+cx\\ &\Leftrightarrow (ad-bc)(wz-xy)=dz+cx\overset{\mathrm{IV}}{=}1,\end{aligned}$$

somit ist $(ad-bc)$ eine Einheit mit Inversem $(wz-xy)$. (Hier kann bemerkt werden, dass $wz-xy=\det(B)$ ist, also ist die obige Gleichung gerade $\det(A)\cdot\det(B)=\det(AB)=\det(\mathbb{1}_2)$.)

Zusätzlich können wir nun ablesen, was B ist:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{ad-bc}\cdot\mathrm{V}\right):\qquad & w=\frac{d}{ad-bc}\\ \left(\frac{-1}{ad-bc}\cdot\mathrm{VI}\right):\qquad & y=\frac{-c}{ad-bc}\\ \left(\frac{-1}{ad-bc}\cdot\mathrm{VII}\right):\qquad & x=\frac{-b}{ad-bc}\\ \left(\frac{1}{ad-bc}\cdot\mathrm{VIII}\right):\qquad & z=\frac{a}{ad-bc}.\end{aligned}$$

In anderen Worten: Falls A invertierbar ist, ist $ad-bc$ eine Einheit und

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}.$$

Sei nun umgekehrt $ad-bc\in R$ eine Einheit. Dann ist A invertierbar, wie sich mit unserer expliziten Formel für das Inverse nun schnell nachrechnen lässt:

$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\left(\frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ba\\ cd-dc & -cb+da\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

und genauso

$$\left(\frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot=\frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix} da-bc & db-bd\\ -ca+ac & -cb+ad\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

(a) Wir zeigen die Aussage per Induktion über $n\geq 1$:

Sei zunächst $n=1$. Es gibt nur eine Bijektion auf der Menge $\{1\}$, also hat $\Sigma_1=\{\mathrm{id}\}$ genau $1=1!$ Elemente.

Sei nun $n\geq 1$, und wir nehmen an, dass Σ_n genau $n!$ Elemente hat. Informell ist unser Argument: Für eine Permutation von $n+1$ Elementen gibt es $n+1$ verschiedene Wahlen eines Elements, das auf $n+1$ abgebildet werden kann, und für jede solche Wahl gibt es insgesamt $n!$ Permutationen, da danach noch die übrigen n Elemente sortiert werden müssen. Wir schreiben das nun etwas ordentlicher auf:

Wir definieren für $1\leq i\leq n+1$ $P_i=\{\sigma\in\Sigma_{n+1}|\sigma(i)=n+1\}$. Dann sind die $n+1$ verschiedenen P_i paarweise disjunkt, und Σ_{n+1} ist ihre Vereinigung. Insbesondere ist also $|\Sigma_{n+1}|=\sum_{i=1}^{n+1}|P_i|$.

Wir bemerken zunächst, dass P_{n+1} mit Σ_n identifiziert werden kann: Betrachte dafür die Abbildung

$$\begin{aligned} f:\Sigma_n &\longrightarrow P_{n+1}\\ \sigma &\longrightarrow \left(\tilde{\sigma}:k\mapsto\begin{cases}\sigma(k) & k\leq n\\ n+1 & k=n+1\end{cases}\right).\end{aligned}$$

Diese Abbildung ist eine Bijektion, ihr Inverses ist gegeben durch die Einschränkung

$$\begin{aligned} g:P_{n+1} &\longrightarrow \Sigma_n\\ \sigma' &\longrightarrow \sigma'|_{\{1,\dots,n\}}.\end{aligned}$$

Für ein fixes $i \leq n$ betrachten wir nun die Abbildung

$$\begin{aligned} f_i : P_{n+1} &\longrightarrow P_i \\ \sigma &\longrightarrow \sigma \circ (i, n+1), \end{aligned}$$

Es ist

$$(f_i(\sigma))(i) = (\sigma \circ (i, n+1))(i) = \sigma(n+1) = n+1,$$

also ist $f(\sigma) \in P_i$ und die Abbildung ist wohldefiniert. Außerdem ist die Abbildung wieder eine Bijektion: Ihr Inverses ist nun gegeben durch

$$\begin{aligned} g_i : P_i &\longrightarrow P_{n+1} \\ \sigma' &\longrightarrow \sigma' \circ (i, n+1). \end{aligned}$$

Somit ist insbesondere $|P_i| = |P_{n+1}| = |\Sigma_n| = n!$, also ist insgesamt

$$|\Sigma_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n+1} |P_i| = (n+1) \cdot n! = (n+1)!.$$

(b) Die Menge der Fehlstände von $\tau = (i, j)$ ist definiert als

$$F = \big\{(p,q) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\} | p < q \text{ und } \tau(p) > \tau(q).\big\}$$

Sei also $1 \leq p < q \leq$ n. Wenn $p \neq i$, $q \neq j$: Dann ist $\tau(p) = p < q = \tau(q)$, also $(p,q) \notin F$. Es kann also (p,q) nur dann ein Fehlstand sein, wenn $p = i$ oder $q = j$ ist:

- Falls $p = i$ und $q \neq j$ ist, muss, damit (p,q) ein Fehlstand ist, $\tau(p) = j > \tau(q) = q$ sein. Zusätzlich ist nach Voraussetzung $q > i$.
- Falls $p = i$ und $q = j$ ist, ist $\tau(p) = j > i = \tau(q)$, also $(p,q) \in F$.
- Falls $p \neq i$ und $q = j$ ist, muss, damit (p,q) ein Fehlstand ist, $\tau(p) = p > \tau(q) = i$ sein. Zusätzlich ist nach Voraussetzung $p < j$.

Insgesamt ist also die Menge der Fehlstände folgende disjunkte Vereinigung (wobei (i, j) aus der Aufgabe fix sind):

$$F = \{(i,q) | i < q < j\} \cup \{(i,j)\} \cup \{(p,j) | i < p < j\}.$$

Somit ist die Anzahl der Fehlstände

$$|F| = \Big|\{(i,q) | i < q < j\}\Big| + \Big|\{(i,j)\}\Big| + \Big|\{(p,j) | i < p < j\}\Big| = (j-i)-1+1+(j-i)-1 = 2(j-i)-1.$$

Bonus: Wieder zeigen wir die Aussage per Induktion, dabei benutzen wir unsere Konstruktionen aus (a): Für $n = 2$ ist $\Sigma_2 = \{\mathrm{id}, (1,2)\}$. Dabei ist $\mathrm{sgn}(\mathrm{id}) = 1$ und $\mathrm{sgn}((1,2)) = -1$, also gibt es genau $1 = \frac{2!}{2}$ Elemente mit positivem Vorzeichen.

Sei nun angenommen, dass für ein $n \geq 2$ genau $\frac{n!}{2}$ Elemente in Σ_n positives Vorzeichen haben. Wir betrachten für Σ_{n+1} wieder die Teilmengen P_i, die genau jene Permutationen enthalten, die i auf $n+1$ schicken, sowie die Bijektionen $f : P_{n+1} \to \Sigma_n$ und $f_i : P_i \to P_{n+1}$.

Zunächst bemerken wir, dass für ein $\sigma \in \Sigma_n$ gilt, dass σ und $f(\sigma)$ dieselbe Menge von Fehlständen haben, insbesondere also die gleiche Anzahl und somit das gleiche Vorzeichen. Somit haben nach Induktionsannahme genau $\frac{n!}{2}$ Elemente in P_{n+1} positives Vorzeichen.

Nun betrachten wir f_i: Für ein $\sigma \in P_{n+1}$ ist

$$\mathrm{sgn}\big(f_i(\sigma)\big) = \mathrm{sgn}\big(\sigma \circ (i, n+1)\big) = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \mathrm{sgn}\big((i, n+1)\big) = -\mathrm{sgn}(\sigma),$$

f_i kehrt das Vorzeichen also gerade um. Da P_{n+1} genau $n! - \frac{n!}{2} = \frac{n!}{2}$ Elemente mit negativem Vorzeichen hat, hat somit P_i genau $\frac{n!}{2}$ Elemente mit positivem Vorzeichen. Insgesamt gibt es also in Σ_{n+1} genau

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{n!}{2} = (n+1) \cdot \frac{n!}{2} = \frac{(n+1)!}{2}$$

Elemente mit positivem Vorzeichen.

Aufgabe 4

Wir zählen zunächst die Elemente von Σ_4 auf (Mit 3(a) muss es insgesamt 24 Permutationen geben). Dabei geben wir für jedes Element die entsprechende Abbildung an. Die Abbildung notieren wir (nur in dieser Lösung!) als $[\sigma(1);\sigma(2);\sigma(3);\sigma(4)]$, bspw. wäre die Transposition $(1,2)$ also $[2;1;3;4]$, da sie 1 und 2 vertauscht. Zusätzlich schreiben wir jede Permutation als Produkt von Zykeln. Dann lässt sich das Vorzeichen ablesen, da ein Zykel von Länge k als Vorzeichen $(-1)^k$ hat.

Abbildung	Zykel	$\mathrm{sgn}(\sigma)$	$A_{\sigma(1),1}\cdot A_{\sigma(2),2}\cdot A_{\sigma(3),3}\cdot A_{\sigma(4),4}$
$[1;2;3;4]$	id	1	$3\cdot2\cdot4\cdot6=144$
$[1;2;4;3]$	$(3,4)$	-1	$3\cdot2\cdot2\cdot1=12$
$[1;3;2;4]$	$(2,3)$	-1	$3\cdot5\cdot0\cdot6=0$
$[1;3;4;2]$	$(2,3,4)$	1	$3\cdot5\cdot2\cdot1=30$
$[1;4;2;3]$	$(2,4,3)$	1	$3\cdot3\cdot0\cdot1=0$
$[1;4;3;2]$	$(2,4)$	-1	$3\cdot3\cdot4\cdot1=36$
$[2;1;3;4]$	$(1,2)$	-1	$2\cdot2\cdot4\cdot6=96$
$[2;1;4;3]$	$(1,2)\circ(3,4)$	1	$2\cdot2\cdot2\cdot1=8$
$[2;3;1;4]$	$(1,2,3)$	1	$2\cdot5\cdot2\cdot6=120$
$[2;3;4;1]$	$(1,2,3,4)$	-1	$2\cdot5\cdot2\cdot2=40$
$[2;4;1;3]$	$(1,2,4,3)$	-1	$2\cdot3\cdot2\cdot1=12$
$[2;4;3;1]$	$(1,2,4)$	1	$2\cdot3\cdot4\cdot2=48$
$[3;1;2;4]$	$(1,3,2)$	1	$1\cdot2\cdot0\cdot6=0$
$[3;1;4;2]$	$(1,3,4,2)$	-1	$1\cdot2\cdot2\cdot1=4$
$[3;2;1;4]$	$(1,3)$	-1	$1\cdot2\cdot2\cdot6=24$
$[3;2;4;1]$	$(1,3,4)$	1	$1\cdot2\cdot2\cdot2=8$
$[3;4;1;2]$	$(1,3)\circ(2,4)$	1	$1\cdot3\cdot2\cdot1=6$
$[3;4;2;1]$	$(1,3,2,4)$	-1	$1\cdot3\cdot0\cdot2=0$
$[4;1;2;3]$	$(1,4,3,2)$	-1	$5\cdot2\cdot0\cdot1=0$
$[4;1;3;2]$	$(1,4,2)$	1	$5\cdot2\cdot4\cdot1=40$
$[4;2;1;3]$	$(1,4,3)$	1	$5\cdot2\cdot2\cdot1=20$
$[4;2;3;1]$	$(1,4)$	-1	$5\cdot2\cdot4\cdot2=80$
$[4;3;1;2]$	$(1,4,2,3)$	-1	$5\cdot5\cdot2\cdot1=50$
$[4;3;2;1]$	$(1,4)\circ(2,3)$	1	$5\cdot5\cdot0\cdot2=0$

Also ist mit der Leibniz-Formel die Determinante von A wie folgt gegeben:

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma\in\Sigma_4}(-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)}A_{\sigma(1),1}\cdot A_{\sigma(2),2}\cdot A_{\sigma(3),3}\cdot A_{\sigma(4),4}\\
&=144-12-0+30+0-36-96+8+120-40-12+48+0-4-24+8+6-0-0+40+20-80-50+0\\
&=70.
\end{aligned}
$$

Bemerkung. Insbesondere lässt sich also erkennen, dass die Matrix A über dem Körper $\mathbb{Z}/7$ (wie in Aufgabe 1 vorgekommen) nicht invertierbar ist, da $\det(A)=70\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 7)$. Noch allgemeiner können wir genau sagen, über welchen Körpern K die Matrix A invertierbar ist: 70 ist genau dann eine Einheit, wenn alle Primfaktoren von 70 Einheiten sind, also 2, 5 und 7. Somit ist A invertierbar genau dann, wenn die Charakteristik von K ungleich 2, 5 und 7 ist.