Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $n \geq 1$ und $\sigma \in \Sigma_n$. Zeige:

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$, R ein kommutativer Ring und M, N R-Moduln. Sei weiterhin $b_1, \ldots, b_n$ eine nummerierte Basis von M und $k \leq n$.

(a) Zeige: Für jedes $n \in N$ und injektive monotone Funktion $\iota : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, n\}$ gibt es genau eine k-fach alternierende Multilinearform $d_{\iota,n} \in \mathrm{Alt}_R^k(M, N)$, sodass

$$d_{\iota,n}\left(b_{\iota_1}, \ldots, b_{\iota_k}\right) = n,$$

und für jedes $\kappa : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, n\}$ mit $\mathrm{Im}(\kappa) \neq \mathrm{Im}(\iota)$

$$d_{\iota,n}\left(b_{\kappa_1}, \ldots, b_{\kappa_k}\right) = 0.$$

(b) Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Alt}_R^k(M, N) &\longrightarrow F\big(\mathrm{Moin}(k, n), N\big) \\ d &\longmapsto \big(\iota \mapsto d\big(b_{\iota_1}, \ldots, b_{\iota_k}\big)\big) \end{aligned}$$

aus Lemma III.3.5. Folgere aus (a), dass diese Abbildung in diesem Fall (also wenn das Erzeugendensystem eine Basis von M ist) surjektiv ist. Mit dem Lemma ist die Abbildung also dann eine Bijektion.

(c) Folgere: Falls $N = R$ ist, bildet die Menge

$$M_b = \left\{ d_{\iota,1} \,\middle|\, \iota : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, n\} \text{ monoton und injektiv} \right\}$$

eine Basis von $\mathrm{Alt}_R^k(M, R)$. Insbesondere gilt, dass $\dim_R\left(\mathrm{Alt}_R^k(M, R)\right) = \binom{n}{k}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

1. Betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4, 4, \mathbb{Q}).$$

   von Blatt 12. Berechne $\det(A)$ mithilfe des Gauß-Algorithmus.

2. Wir betrachten die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 4 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 7 & 3 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 9 & 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9 & 0 & 5 \\ 3 & 3 & 8 & 4 & 7 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(7, 7, \mathbb{Q}).$$

   Berechne $\det(B)$ mithilfe der Laplace-Entwicklung.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Wir haben in Korollar III.3.6 gesehen, dass für ein Modul M über einem kommutativen Ring R gilt: Wenn M eine Basis mit n Elementen hat, so hat jede andere Basis von M ebenfalls n Elemente. In dieser Aufgabe sehen wir, dass das nicht notwendigerweise stimmt, wenn R nicht kommutativ ist:

(a) Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum, für den es einen Isomorphismus $V \cong V \times V$ gibt. Betrachte dann

$$R = \mathrm{Lin}_K(V, V).$$

Dann ist R nach Blatt 9, Aufgabe 3(b) ein Ring. Insbesondere können wir R als R-Modul betrachten. Zeige: Es gibt einen Isomorphismus von R-Moduln $R \cong R \times R$.

(b) Solche Vektorräume gibt es tatsächlich: Betrachte den Vektorraum $V = F^{\mathrm{fs}}(\mathbb{N}, K)$ von Funktionen $f : \mathbb{N} \to K$, für die $f(n) = 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (Siehe Beispiel II.3.5(3)). Zeige: Es gibt einen Vektorraumisomorphismus

$$V \cong V \times V.$$

Bemerkung. Insbesondere hat einerseits der R-Modul R die Basis $\{1\}$, aber der isomorphe R-Modul $R \times R$ hat auch die Basis $\{(1,0),(0,1)\}$: Somit gibt es zwei endliche Basen mit unterschiedlich vielen Elementen.