Aufgabe 1

Wir bemerken zunächst, dass

$$\prod_{1\le i<j\le n}\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}=\frac{\prod_{1\le i<j\le n}\big(\sigma(j)-\sigma(i)\big)}{\prod_{1\le i<j\le n}(j-i)}.$$

Für jedes Tupel (i,j) mit $i<j$ ist nun entweder $\sigma(i)<\sigma(j)$ oder umgekehrt $\sigma(j)<\sigma(i)$. Im ersten Fall gibt es im Produkt im Nenner den Faktor $\big(\sigma(j)-\sigma(i)\big)$, im zweiten Fall gibt es dort den Faktor $\big(\sigma(i)-\sigma(j)\big)=-\big(\sigma(j)-\sigma(i)\big)$. Informell gesagt kommen also bis auf ein Vorzeichen alle Faktoren im Zähler genauso oft im Nenner vor und kürzen sich weg, dabei bleibt nur ein Vorzeichen über, falls (i,j) ein Fehlstand von σ ist. Etwas ordentlicher aufgeschrieben heißt das folgendes:

Wir erinnern uns, dass die Menge der Fehlstände von σ definiert ist als

$$F(\sigma)=\big\{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2 \mid i<j \text{ und } \sigma(i)>\sigma(j)\big\}.$$

Komplementär definieren wir die Menge R aller (i,j), die von σ nicht umgeordnet werden:

$$R(\sigma)=\big\{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2 \mid i<j \text{ und } \sigma(i)<\sigma(j)\big\}.$$

Dann sind F und R disjunkt und es gilt

$$F\cup R=\big\{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2 \mid i<j\big\}.$$

Mit diesen Notationen ist dann

$$\begin{aligned}
\prod_{1\le i<j\le n}\big(\sigma(j)-\sigma(i)\big) &= \prod_{(i,j)\in F}\big(\sigma(j)-\sigma(i)\big)\cdot\prod_{(i,j)\in R}\big(\sigma(j)-\sigma(i)\big)\\
&= \prod_{(i,j)\in F}\big(-(\sigma(i)-\sigma(j))\big)\cdot\prod_{(i,j)\in R}\big(\sigma(j)-\sigma(i)\big)\\
&= (-1)^{|F|}\cdot\prod_{(i,j)\in F}\big(\sigma(i)-\sigma(j)\big)\cdot\prod_{(i,j)\in R}\big(\sigma(j)-\sigma(i)\big)\\
&= (-1)^{|F|}\cdot\prod_{(i,j)\in F}\Big(\max\big(\sigma(i),\sigma(j)\big)-\min\big(\sigma(i),\sigma(j)\big)\Big)\cdot\prod_{(i,j)\in R}\Big(\max\big(\sigma(i),\sigma(j)\big)-\min\big(\sigma(i),\sigma(j)\big)\Big)\\
&= (-1)^{|F|}\cdot\prod_{1\le i<j\le n}\Big(\max\big(\sigma(i),\sigma(j)\big)-\min\big(\sigma(i),\sigma(j)\big)\Big)
\end{aligned}$$

Da σ eine Bijektion ist, ist auch die Abbildung

$$\begin{aligned}
\big\{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2 \mid i<j\big\} &\longrightarrow \big\{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2 \mid i<j\big\}\\
(i,j) &\longmapsto \Big(\min\big(\sigma(i),\sigma(j)\big),\max\big(\sigma(i),\sigma(j)\big)\Big)
\end{aligned}$$

eine Bijektion (min und max stellen nur sicher, dass das kleinere Element links steht), also ist

$$\prod_{1\le i<j\le n}\Big(\max\big(\sigma(i),\sigma(j)\big)-\min\big(\sigma(i),\sigma(j)\big)\Big)=\prod_{1\le i<j\le n}(j-i),$$

weil mit der Bijektion nur die Faktoren vertauscht werden, und somit

$$\prod_{1\le i<j\le n}\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}=\frac{\prod_{1\le i<j\le n}\big(\sigma(j)-\sigma(i)\big)}{\prod_{1\le i<j\le n}(j-i)}=\frac{(-1)^{|F|}\cdot\prod_{1\le i<j\le n}(j-i)}{\prod_{1\le i<j\le n}(i-j)}=(-1)^{|F|},$$

was nach Korollar III.2.6 (und dessen Beweis) gerade das Vorzeichen von σ ist.

Aufgabe 2

(a) Dass eine alternierende Multilinearform eindeutig durch ihre Werte auf monoton indizierten Folgen von Basisvektoren bestimmt ist, ist gerade die Aussage von Lemma III.3.5: Dieses besagt gerade, dass zwei k-fach alternierende multilineare Abbildungen d und d' genau dann gleich sind, wenn für jede injektive monotone Funktion $i : \{1,\dots,k\} \to \{1,\dots,n\}$ gilt:

$$d(b_{i_1},\dots,b_{i_n}) = d'(b_{i_1},\dots,b_{i_n}).$$

Insbesondere bedeutet das also: Falls ein d wie in der Aufgabe existiert, ist es eindeutig. Wir müssen also nur die Existenz beweisen. Allerdings beweisen wir auf dem Weg dahin trotzdem die Eindeutigkeit, um herauszufinden, wie wir $d_{\iota,n}$ definieren müssen (diesen Schritt kann man sich aber sparen, wenn man die richtige Definition rät):

Für $(m_1,\dots,m_k) \in M^k$ betrachten wir, welchen Wert $d_{\iota,n}(m_1,\dots,m_k) \in N$ haben muss. Schreibe für alle i $m_i = \sum_{j=1}^n \mu_{i,j} b_j$. Dann ist wegen Multilinearität:

$$\begin{aligned} d_{\iota,n}(m_1,\dots,m_k) &= d_{\iota,n}\left(\sum_{j_1=1}^n \mu_{1,j_1} b_{j_1},\dots,\sum_{j_k=1}^n \mu_{k,j_k} b_{j_k}\right) \\ &= \sum_{1\le j_1,\dots,j_n\le n} \mu_{1,j_1}\cdot\ldots\cdot\mu_{k,j_k}\cdot d_{\iota,n}\big(b_{j_1},\dots,b_{j_k}\big). \end{aligned}$$

Wir wiederholen nun die Rechnung aus dem (vorgeschalteten) Beweis von Lemma III.3.5: Betrachten wir für einen fixen Summanden nun $j_1,\dots,j_k$ als Funktion $j : \{1,\dots,k\} \to \{1,\dots,n\}$, so verschwinden alle Summanden, für die diese Funktion nicht injektiv ist (da sich dann mindestens ein Vektor in der alternierenden Abbildung wiederholt). Für jedes injektive j gibt es eine eindeutige Permutation $\sigma \in \Sigma_k$ sowie ein monotones injektives $\jmath$, sodass $j = \jmath \circ \sigma$ ist. Somit ist also

$$\begin{aligned} d_{\iota,n}(m_1,\dots,m_k) &= \sum_{1\le j_1,\dots,j_n\le n} \mu_{1,j_1}\cdot\ldots\cdot\mu_{k,j_k}\cdot d_{\iota,n}\big(b_{j_1},\dots,b_{j_k}\big) \\ &= \sum_{\jmath\in\mathrm{Moin}(k,n)}\sum_{\sigma\in\Sigma_k} \mu_{1,\jmath_{\sigma(1)}}\cdot\ldots\cdot\mu_{k,\jmath_{\sigma(k)}}\cdot d(b_{\jmath_{\sigma(1)}},\dots,b_{\jmath_{\sigma(k)}}) \\ &= \sum_{\jmath\in\mathrm{Moin}(k,n)}\sum_{\sigma\in\Sigma_k} \mu_{1,\jmath_{\sigma(1)}}\cdot\ldots\cdot\mu_{k,\jmath_{\sigma(k)}}\cdot(-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)}\cdot d(b_{\jmath_1},\dots,b_{\jmath_k}) \\ &= \sum_{\jmath\in\mathrm{Moin}(k,n)} d(b_{\jmath_1},\dots,b_{\jmath_k})\cdot\sum_{\sigma\in\Sigma_k}(-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)}\cdot\mu_{1,\jmath_{\sigma(1)}}\cdot\ldots\cdot\mu_{k,\jmath_{\sigma(k)}} \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist nun $d(b_{\jmath_1},\dots,b_{\jmath_k}) = 0$ falls $\jmath \neq \iota$, also ist

$$\begin{aligned} d_{\iota,n}(m_1,\dots,m_k) &= d(b_{\iota_1},\dots,b_{\iota_k})\cdot\sum_{\sigma\in\Sigma_k}(-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)}\cdot\mu_{1,\iota_{\sigma(1)}}\cdot\ldots\cdot\mu_{k,\iota_{\sigma(k)}} \\ &= n\cdot\sum_{\sigma\in\Sigma_k}(-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)}\cdot\mu_{1,\iota_{\sigma(1)}}\cdot\ldots\cdot\mu_{k,\iota_{\sigma(k)}}. \end{aligned}$$

Wir definieren also (gezwungenermaßen):

$$d_{\iota,n}(m_1,\dots,m_k) := n\cdot\sum_{\sigma\in\Sigma_k}(-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)}\cdot\mu_{1,\iota_{\sigma(1)}}\cdot\ldots\cdot\mu_{k,\iota_{\sigma(k)}}.$$

Dies hat, nach obiger Rechnung, die gewünschten Eigenschaften. Wir müssen nur noch zeigen, dass tatsächlich eine alternierende multilineare Abbildung vorliegt: Für Multilinearität beachten wir, dass für fixes i und σ die Abbildung $m_i \mapsto \mu_{i,\iota\sigma(i)}$, die den Koeffizienten von m_i bezüglich $b_{\sigma(i)}$ extrahiert, linear ist. Als

Formeln ausgeschrieben (was aber vielleicht nicht nötig ist) heißt das folgendes: Falls m_i' die Koeffizienten $\mu_{i,j}'$ hat, ist

$$\begin{aligned}
d_{\iota,n}\left(m_1,\ldots,m_i+m_i',\ldots,m_k\right) &= n\cdot\sum_{\sigma\in\Sigma_k}(-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)}\cdot\mu_{1,\iota_{\sigma(1)}}\cdot\ldots\cdot(\mu_{i,\iota_{\sigma(i)}}+\mu_{i,\iota_{\sigma(i)}}')\cdot\ldots\cdot\mu_{k,\iota_{\sigma(k)}}\\
&= n\cdot\sum_{\sigma\in\Sigma_k}(-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)}\cdot\mu_{1,\iota_{\sigma(1)}}\cdot\ldots\cdot\mu_{i,\iota_{\sigma(i)}}\cdot\ldots\cdot\mu_{k,\iota_{\sigma(k)}}+n\cdot\sum_{\sigma\in\Sigma_k}(-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)}\cdot\mu_{1,\iota_{\sigma(1)}}\cdot\ldots\cdot\mu_{i,\iota_{\sigma(i)}}'\cdot\ldots\cdot\mu_{k,\iota_{\sigma(k)}}\\
&= d_{\iota,n}(m_1,\ldots,m_i,\ldots,m_k)+d_{\iota,n}\left(m_1,\ldots,m_i',\ldots,m_k\right),
\end{aligned}$$

und ähnlicherweise ist für $\lambda\in R$

$$\begin{aligned}
d_{\iota,n}(m_1,\ldots,\lambda\cdot m_i,\ldots,m_k) &= n\cdot\sum_{\sigma\in\Sigma_k}(-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)}\cdot\mu_{1,\iota_{\sigma(1)}}\cdot\ldots\cdot(\lambda\cdot\mu_{i,\iota_{\sigma(i)}})\cdot\ldots\cdot\mu_{k,\iota_{\sigma(k)}}\\
&= \lambda\cdot n\cdot\sum_{\sigma\in\Sigma_k}(-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)}\cdot\mu_{1,\iota_{\sigma(1)}}\cdot\ldots\cdot\mu_{i,\iota_{\sigma(i)}}\cdot\ldots\cdot\mu_{k,\iota_{\sigma(k)}}\\
&= \lambda\cdot d_{\iota,n}(m_1,\ldots,m_i,\ldots,m_k).
\end{aligned}$$

Um zu sehen, dass d alternierend ist, sei $\eta\in\Sigma_k$. Dann ist

$$\begin{aligned}
d_{\iota,n}\left(m_{\eta(1)},\ldots,m_{\eta(k)}\right) &= n\cdot\sum_{\sigma\in\Sigma_k}(-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)}\cdot\mu_{\eta(1),\iota_{\sigma(1)}}\cdot\ldots\cdot\mu_{\eta(k),\iota_{\sigma(k)}}\\
&= n\cdot\sum_{\sigma\in\Sigma_k}(-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)}\cdot\mu_{1,\iota_{\sigma(\eta^{-1}(1))}}\cdot\ldots\cdot\mu_{k,\iota_{\sigma(\eta^{-1}(k))}}\\
&= n\cdot\sum_{\sigma\in\Sigma_k}(-1)^{\operatorname{sgn}(\eta)}\cdot(-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma\circ\eta^{-1})}\cdot\mu_{1,\iota_{\sigma\circ\eta^{-1}(1)}}\cdot\ldots\cdot\mu_{k,\iota_{\sigma\circ\eta^{-1}(k)}}\\
&= (-1)^{\operatorname{sgn}(\eta)}\cdot n\cdot\sum_{\sigma'\in\Sigma_k}(-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma')}\cdot\mu_{1,\iota_{\sigma'}}\cdot\ldots\cdot\mu_{k,\iota_{\sigma'(k)}}\\
&= (-1)^{\operatorname{sgn}(\eta)}\cdot d_{\iota,n}(m_1,\ldots,m_k)
\end{aligned}$$

Dabei haben wir in der zweiten Zeile die Faktoren im Produkt mit η^{-1} vertauscht, in der dritten Zeile benutzen wir, dass $\sigma=\sigma\circ\eta^{-}1\circ\eta$ und sgn ein Homomorphismus ist, und in der vierten Zeile sortieren wir die Summanden in der Summe neu, da $\sigma\mapsto\sigma\circ\eta^{-1}=:\sigma'$ eine Bijektion ist.

(b) Hier gibt es nun fast nichts zu tun: Sei $f:\operatorname{Moin}(k,n)\to N$ eine beliebige Funktion. Dann haben wir in (a) für jedes $\iota\in\operatorname{Moin}(k,n)$ ein $d_{\iota,f(\iota)}\in\operatorname{Alt}_R^k(M,N)$ konstruiert. Wir betrachten nun die Summe

$$d_f:=\sum_{\iota\in\operatorname{Moin}(k,n)}d_{\iota,f(\iota)}\in\operatorname{Alt}_R^k(M,N).$$

Dann wird d_f von der Abbildung aus Lemma III.3.5 genau auf f abgebildet: Per Definition schickt die Abbildung d_f auf die Funktion

$$\begin{aligned}
\operatorname{Moin}(k,n) &\longrightarrow N\\
\iota &\longmapsto d_f\left(b_{\iota_1},\ldots,b_{\iota_k}\right)\\
&= \sum_{\jmath\in\operatorname{Moin}(k,n)}d_{\jmath,f(\jmath)}\left(b_{\iota_1},\ldots,b_{\iota_k}\right)\\
&= d_{\iota,f(\iota)}\left(b_{\iota_1},\ldots,b_{\iota_k}\right)=f(\iota),
\end{aligned}$$

also gerade auf $f\in F\left(\operatorname{Moin}(k,n),N\right)$. In anderen Worten: Die Abbildung ist surjektiv.

(c) Für $N=R$ ist eine Basis von N als R-Modul gegeben durch $\{1\}$. Somit ist eine Basis des R-Moduls $F\left(\operatorname{Moin}(k,n),N\right)$ gegeben durch die Menge $\Delta=\{\delta_\iota|\iota\in\operatorname{Moin}(k,n)\}$, wobei

$$\delta_\iota(\jmath)=\begin{cases}1 & \jmath=\iota\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

(Hierbei benutzen wir, dass $\mathrm{Moin}(k,n)$ eine endliche Menge ist: Im Allgemeinen erzeugen diese Indikatorfunktionen nur die Funktionen mit endlichem Support.)

Unter der Bijektion aus (b) wird die alternierende multilineare Abbildung $d_{\iota,1} \in M_b$ gerade auf δ_ι geschickt. Da die Bijektion R-linear ist (das ist offensichtlich genug, dass es nicht gezeigt werden muss), ist sie ein Isomorphismus von R-Moduln. Insbesondere schickt sie Basen auf Basen. Da also Δ eine Basis ist, ist auch M_b eine Basis.

Für die Dimension müssen wir nun nur die Elemente zählen: Δ steht in Bijektion zu $\mathrm{Moin}(k,n)$, und es gibt eine eindeutige monotone Injektion $\iota : \{1,\dots,k\} \to \{1,\dots,n\}$ für jede k-elementige Teilmenge von $\{1,\dots,n\}$. Davon gibt es genau $\binom{n}{k}$ viele.

Aufgabe 3

1. Wir benutzen Beobachtung III.4.3, um die Matrix mit dem Gauß-Algorithmus zu vereinfachen. Dabei halten wir den Effekt auf die Determinante fest: Zeilenoperationen von Typ I (Addition von Vielfachen) verändern die Determinante nicht, Typ II (Skalierung um λ) skaliert gerade die Determinante um λ, und Typ III (Vertauschung) ändert das Vorzeichen.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \overset{\substack{II-\frac{2}{3}\cdot I \\ III-\frac{1}{3}\cdot I \\ IV-\frac{5}{3}\cdot I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{13}{3} & \frac{10}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix} \overset{\substack{III-\frac{13}{2}\cdot II \\ IV+\frac{1}{2}\cdot II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 12 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -2 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \overset{IV+\frac{1}{6}\cdot III}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 12 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{35}{12} \end{pmatrix}$$

   Da wir nur Typ I-Operationen verwendet haben, hat sich die Determinante nicht verändert. Die letzte Matrix ist nun eine obere Dreiecksmatrix, also ist mit Beispiel III.3.2(2) ihre Determinante das Produkt der Diagonaleinträge:

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 12 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{35}{12} \end{pmatrix} = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 \cdot \frac{35}{12} = 70.$$

2. Für eine Berechnung der Determinante mit der Laplace-Entwicklung lohnt es sich, Zeilen bzw. Spalten auszuwählen, in denen möglichst viele Einträge 0 sind. Zufälligerweise gibt es davon einige. Wir markieren in der folgenden Rechnung jeweils die Zeile bzw. Spalte farbig, nach der wir im nächsten Schritt entwickeln. Dabei schreiben wir im ersten Schritt noch alle Summanden auf, danach lassen wir die Summanden weg, die mit 0 multipliziert werden:

$$\begin{aligned}
\det(B) = \begin{pmatrix} 3&1&3&4&4&0&5 \\ 2&5&7&3&8&0&4 \\ 0&2&9&0&3&0&9 \\ 0&0&0&0&2&0&0 \\ 0&0&1&0&9&0&5 \\ 3&3&8&4&7&3&6 \\ 0&0&0&0&9&0&2 \end{pmatrix} &= -0\cdot\det\begin{pmatrix} 1&3&4&4&0&5 \\ 5&7&3&8&0&4 \\ 2&9&0&3&0&9 \\ 0&1&0&9&0&5 \\ 3&8&4&7&3&6 \\ 0&0&0&9&0&2 \end{pmatrix} + 0\cdot\det\begin{pmatrix} 3&3&4&4&0&5 \\ 2&7&3&8&0&4 \\ 0&9&0&3&0&9 \\ 0&1&0&9&0&5 \\ 3&8&4&7&3&6 \\ 0&0&0&9&0&2 \end{pmatrix} - 0\cdot\det\begin{pmatrix} 3&1&4&4&0&5 \\ 2&5&3&8&0&4 \\ 0&2&0&3&0&9 \\ 0&0&0&9&0&5 \\ 3&3&4&7&3&6 \\ 0&0&0&9&0&2 \end{pmatrix} \\
&\quad + 0\cdot\det\begin{pmatrix} 3&1&3&4&0&5 \\ 2&5&7&8&0&4 \\ 0&2&9&3&0&9 \\ 0&0&1&9&0&5 \\ 3&3&8&7&3&6 \\ 0&0&0&9&0&2 \end{pmatrix} - 2\cdot\det\begin{pmatrix} 3&1&3&4&0&5 \\ 2&5&7&3&0&4 \\ 0&2&9&0&0&9 \\ 0&0&1&0&0&5 \\ 3&3&8&4&3&6 \\ 0&0&0&0&0&2 \end{pmatrix} + 0\cdot\det\begin{pmatrix} 3&1&3&4&4&5 \\ 2&5&7&3&8&4 \\ 0&2&9&0&3&9 \\ 0&0&1&0&9&5 \\ 3&3&8&4&7&6 \\ 0&0&0&0&9&2 \end{pmatrix} - 0\cdot\det\begin{pmatrix} 3&1&3&4&4&0 \\ 2&5&7&3&8&0 \\ 0&2&9&0&3&0 \\ 0&0&1&0&9&0 \\ 3&3&8&4&7&3 \\ 0&0&0&0&9&0 \end{pmatrix} \\
&= (-2)\cdot\det\begin{pmatrix} 3&1&3&4&0&5 \\ 2&5&7&3&0&4 \\ 0&2&9&0&0&9 \\ 0&0&1&0&0&5 \\ 3&3&8&4&3&6 \\ 0&0&0&0&0&2 \end{pmatrix} = (-2)\cdot 3\cdot\det\begin{pmatrix} 3&1&3&4&5 \\ 2&5&7&3&4 \\ 0&2&9&0&9 \\ 0&0&1&0&5 \\ 0&0&0&0&2 \end{pmatrix} = (-2)\cdot 3\cdot 2\cdot\det\begin{pmatrix} 3&1&3&4 \\ 2&5&7&3 \\ 0&2&9&0 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix} \\
&= (-2)\cdot 3\cdot 2\cdot(-1)\cdot\det\begin{pmatrix} 3&1&4 \\ 2&5&3 \\ 0&2&0 \end{pmatrix} = (-2)\cdot 3\cdot 2\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot\det\begin{pmatrix} 3&4 \\ 2&3 \end{pmatrix} \\
&= (-2)\cdot 3\cdot 2\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(3\cdot 3-4\cdot 2) \\
&= -24.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

(a) Sei V ein K-Vektorraum mit Isomorphismus $\varphi : V \to V \times V$, und R der Ring $\mathrm{Lin}_K(V,V)$. Betrachte folgende Abbildung:

$$\begin{aligned} -\circ\varphi : \mathrm{Lin}_K(V,V) &\longrightarrow \mathrm{Lin}_K(V, V\times V) \\ \eta &\longmapsto \varphi\circ\eta \end{aligned}$$

Das ist ein Isomorphismus von R-Moduln: $-\circ\varphi$ ist additiv mit Blatt 9, Aufgabe 3(a). Es ist R-linear aufgrund der Assoziativität der Komposition. Ein Inverses ist gegeben durch die Komposition mit φ^{-1}.

Zusätzlich betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{pr} : \mathrm{Lin}_K(V, V\times V) &\longrightarrow \mathrm{Lin}_K(V,V)\times \mathrm{Lin}_K(V,V) \\ \zeta &\longmapsto (\mathrm{pr}_1\circ\zeta, \mathrm{pr}_2\circ\zeta), \end{aligned}$$

wobei $\mathrm{pr}_1 : V\times V \to V$ ein Element (v_1, v_2) auf v_1 schickt (und pr_2 analog auf v_2). Diese Abbildung ist wieder additiv, weil wieder mit Blatt 9, Aufgabe 3(a) $\mathrm{pr}_i\circ -$ additiv ist, und R-linear, weil $\mathrm{pr}_i \circ -$ R-linear ist, da Komposition assoziativ ist. Die Abbildung ist auch bijektiv, ihr Inverses ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathrm{Lin}_K(V,V)\times \mathrm{Lin}_K(V,V) &\longrightarrow \mathrm{Lin}_K(V, V\times V) \\ (\eta_1,\eta_2) &\longmapsto \big(v\mapsto (\eta_1(v),\eta_2(v))\big). \end{aligned}$$

Wir haben also insgesamt eine Kette von R-Modul-Isomorphismen

$$R = \mathrm{Lin}_K(V,V) \xrightarrow{-\circ\varphi} \mathrm{Lin}_K(V, V\times V) \xrightarrow{\mathrm{pr}} \mathrm{Lin}_K(V,V)\times \mathrm{Lin}_K(V,V) = R\times R.$$

(b) Eine Basis von $V = F^{\mathrm{fs}}(\mathbb{N}, K)$ ist gegeben durch

$$\Delta = \{\delta_n | n\in\mathbb{N}\},$$

wobei $\delta_n(n) = 1$ und $\delta_n(m) = 0$ für $m\neq n$. Dann ist eine Basis von $V\times V$ gegeben durch

$$\Delta^\times = \{(\delta_n, 0) | n\in\mathbb{N}\}\cup\{(0,\delta_m)|m\in\mathbb{N}\}.$$

Wir definieren nun eine Abbildung zwischen den Basen:

$$\begin{aligned} \Delta &\longrightarrow \Delta^\times \\ \delta_n &\longmapsto \begin{cases} (\delta_{\frac{n}{2}}, 0) & n \text{ gerade} \\ (0, \delta_{\frac{n-1}{2}}) & n \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Dies ist eine Bijektion, die inverse Abbildung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \Delta^\times &\longrightarrow \Delta \\ (\delta_n, 0) &\longmapsto \delta_{2n} \\ (0,\delta_n) &\longmapsto \delta_{2n+1}. \end{aligned}$$

Insbesondere induziert diese Bijektion zwischen den Basen also einen Vektorraumisomorphismus

$$V = F^{\mathrm{fs}}(\mathbb{N},K) \to F^{\mathrm{fs}}(\mathbb{N},K)\times F^{\mathrm{fs}}(\mathbb{N},K) = V\times V.$$

Bemerkung. Allgemeiner ist für jeden Vektorraum W mit Basis B die Menge $\{(b,0)|b\in B\}\cup\{(0,b)|b\in B\}$ eine Basis von $W\times W$, diese hat "doppelt so viele" Elemente wie B. Einen Isomorphismus $W\cong W\times W$ gibt es also genau dann, wenn W unendlich-dimensional ist, $V = F^{\mathrm{fs}}(\mathbb{N},K)$ ist ein solches Beispiel.