Aufgabe 1 (3 Punkte)

Wir definieren die Menge

$$M = \big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\big\}.$$

Liste alle Elemente der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ auf.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Leite folgendes symbolisch aus den Rechenregeln von Satz 2.5 und 1.10 her: Für Prädikate P und Q in einer Variable mit gleichem Definitionsbereich gilt

(a) $\big((\exists x : P) \wedge (\forall x : Q)\big) \Rightarrow (\exists x : P \wedge Q)$,

(b) $(\forall x : P \vee Q) \Rightarrow \big((\forall x : P) \vee (\exists x : Q)\big)$.

Hinweis: Es ist einfacher, (b) mithilfe eines Umkehrschlusses aus (a) zu folgern (oder umgekehrt), als beide unabhängig zu beweisen.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Zeige: Für eine Menge M und $X, Y \subseteq \mathcal{P}(M)$ gilt

$$\bigcup X \cap \bigcup Y = \bigcup \big\{N \subseteq M \mid \exists U \in X, V \in Y : N = U \cap V\big\}.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Wir definieren die Menge

$$M = \big\{\text{klein}, \text{groß}, \text{größer}, \text{größtes}, \text{maximum}\big\}$$

und auf M die Relation

$$R = \big\{(\text{klein}, \text{klein}), (\text{groß}, \text{groß}), (\text{größer}, \text{groß}), (\text{größer}, \text{größer}),$$
$$(\text{klein}, \text{größtes}), (\text{groß}, \text{größtes}), (\text{größtes}, \text{größtes})\big\}.$$

(a) Ist R reflexiv, transitiv, identitiv, total?

(b) Zeige, dass

$$\big\{O \subseteq M \times M \mid O \text{ ist eine partielle Ordnung und } R \subseteq O\big\}$$

ein kleinstes Element bezüglich der Teilmengenrelation hat, welches wir mit $\preccurlyeq$ notieren.
Hinweis: Die Menge $\preccurlyeq \setminus R$ besitzt nur zwei Elemente.

(c) Finde, falls existent, größte, maximale, kleinste und minimale Elemente von M bezüglich $\preccurlyeq$.

(d) Finde ein Beispiel für eine Relation auf einer Menge eurer Wahl, die nicht durch Hinzufügen weiterer Elemente zu einer partiellen Ordnungsrelation erweitert werden kann.