Aufgabe 1

Die Potenzmenge ist

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(M) = \Big\{&\emptyset,\\ &\big\{\emptyset\big\}, \big\{\{\emptyset\}\big\}, \big\{\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\big\},\\ &\big\{\emptyset,\{\emptyset\}\big\}, \big\{\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\big\}, \big\{\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\big\},\\ &\big\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\big\}\Big\}.\end{aligned}$$

Aufgabe 2

(a) Wir formen die Aussage zuerst um:

$$\begin{aligned}&\Big(\big((\exists x : P) \wedge (\forall x : Q)\big) \Rightarrow (\exists x : P \wedge Q)\Big)\\ \Leftrightarrow &\Big(\neg\big((\exists x : P) \wedge (\forall x : Q)\big) \vee (\exists x : P \wedge Q)\Big)\\ \overset{1.10(7)}{\Longleftrightarrow} &\Big(\big(\neg(\exists x : P) \vee \neg(\forall x : Q)\big) \vee (\exists x : P \wedge Q)\Big)\\ \overset{2.5(1)}{\Longleftrightarrow} &\Big(\big(\neg(\exists x : P) \vee (\exists x : \neg Q)\big) \vee (\exists x : P \wedge Q)\Big). \qquad (\star)\end{aligned}$$

Um $(\star)$ zu beweisen, beginnen wir mit einer Anwendung von 1.10(6):

$$\begin{aligned}&\Big(\neg(\exists x : P) \vee (\exists x : P)\Big)\\ \overset{1.10(4,6)}{\Longleftrightarrow} &\Big(\neg(\exists x : P) \vee (\exists x : P \wedge (\neg Q \vee Q))\Big)\\ \overset{2.5(2)}{\Longleftrightarrow} &\Big(\neg(\exists x : P) \vee \big((\exists x : P \wedge \neg Q) \vee (\exists x : P \wedge Q)\big)\Big)\\ \overset{(*)}{\Longrightarrow} &\Big(\neg(\exists x : P) \vee \big((\exists x : \neg Q) \vee (\exists x : P \wedge Q)\big)\Big)\\ \overset{1.10(1)}{\Longleftrightarrow} &\Big(\big(\neg(\exists x : P) \vee (\exists x : \neg Q)\big) \vee (\exists x : P \wedge Q)\Big).\end{aligned}$$

Dabei benutzt $(*)$, dass $(A \wedge B) \Rightarrow A$ gilt. Das lässt sich entweder schnell mit Wahrheitstafeln überprüfen, oder man sieht dass

$$\big((A \wedge B) \Rightarrow A\big) \Leftrightarrow \big(\neg(A \wedge B) \vee A\big) \overset{1.10(7)}{\Longleftrightarrow} \Big(\big((\neg A) \vee (\neg B)\big) \vee A\Big) \overset{1.10(1,2)}{\Longleftrightarrow} \Big(\big((\neg A) \vee A\big) \vee (\neg B)\Big) \overset{1.10(6,4)}{\Longleftrightarrow} w$$

(b) (b) ist *fast* der Umkehrschluss von (a), nur sind die Prädikate zusätzlich negiert: Wir definieren die neuen Prädikate $\overline{P} := \neg P$ und $\overline{Q} := \neg Q$. Dann gilt mit (a):

$$\begin{aligned}&\Big(\big((\exists x : \overline{P}) \wedge (\forall x : \overline{Q})\big) \Rightarrow (\exists x : \overline{P} \wedge \overline{Q})\Big)\\ \overset{1.10(11)}{\Longleftrightarrow} &\Big(\neg(\exists x : \overline{P} \wedge \overline{Q}) \Rightarrow \neg\big((\exists x : \overline{P}) \wedge (\forall x : \overline{Q})\big)\Big)\\ \overset{2.5(1),1.10(7)}{\Longleftrightarrow} &\Big((\forall x : \neg(\overline{P} \wedge \overline{Q})) \Rightarrow \big(\neg(\exists x : \overline{P}) \vee \neg(\forall x : \overline{Q})\big)\Big)\\ \overset{1.10(7),2.5(1)}{\Longleftrightarrow} &\Big((\forall x : (\neg\overline{P}) \vee (\neg\overline{Q})) \Rightarrow \big((\forall x : \neg\overline{P}) \vee (\exists x : \neg\overline{Q})\big)\Big)\\ \overset{1.10(5)}{\Longleftrightarrow} &\Big((\forall x : P \vee Q) \Rightarrow \big((\forall x : P) \vee (\exists x : Q)\big)\Big).\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Wir wollen zeigen, dass ein $x \in M$ genau dann in der linken Menge enthalten ist, wenn es in der rechten Menge enthalten ist, also

$$\forall x \in M : \Big(x \in \bigcup X \cap \bigcup Y\Big) \Leftrightarrow \Big(x \in \bigcup \big\{N \subseteq M \mid \exists U \in X, V \in Y : N = U \cap V\big\}\Big).$$

Wir zeigen beide Implikationen separat: Sei zunächst $x \in M$ in der rechten Menge enthalten. Dann wollen wir folgern, dass $x \in \bigcup X \cap \bigcup Y$:

$$\begin{aligned}
& x \in \bigcup \{N \subseteq M \mid \exists U \in X, V \in Y : N = U \cap V\} \\
\Leftrightarrow & \left(\exists N \subseteq M : \exists U \in X, V \in Y : N = U \cap V \wedge x \in N\right) \\
\Leftrightarrow & \left(\exists U \in X, V \in Y : x \in U \cap V\right) \\
\Leftrightarrow & \left(\exists U \in X, V \in Y : x \in U \wedge x \in V\right) \\
\xRightarrow{2.5(3)} & \left(\exists U \in X, V \in Y : x \in U\right) \wedge \left(\exists X \in U, V \in Y : x \in V\right) \\
\Longrightarrow & \left(\exists U \in X : x \in U\right) \wedge \left(\exists V \in Y : x \in V\right) \\
\Leftrightarrow & \left(x \in \bigcup X\right) \wedge \left(x \in \bigcup Y\right) \\
\Leftrightarrow & x \in \bigcup X \cap \bigcup Y
\end{aligned}$$

Für die andere Richtung sei nun $x \in \bigcup X \cap \bigcup Y$. Mit den Äquivalenzen aus der ersten Richtung reicht es nun, folgende Implikation zu zeigen (denn dazwischen lagen die einzigen zwei Schritte, in denen wir nur eine Implikationskrichtung gezeigt haben):

$$\left(\left(\exists U \in X : x \in U\right) \wedge \left(\exists V \in Y : x \in V\right)\right) \Rightarrow \left(\exists U \in X, V \in Y : x \in U \wedge x \in V\right)$$

Das gilt, ganz ausführlich, mit folgender Implikationskette:

$$\begin{aligned}
& \left(\left(\exists U \in X : x \in U\right) \wedge \left(\exists V \in Y : x \in V\right)\right) \\
\overset{\star}{\Rightarrow} & \left(\left(\exists U \in X : x \in U\right) \wedge \left(\forall U \in X : (\exists V \in Y : x \in V)\right)\right) \\
\xRightarrow{A2(a)} & \left(\exists U \in X : \left((x \in U) \wedge (\exists V \in Y : x \in V)\right)\right) \\
\overset{\star}{\Rightarrow} & \left(\exists U \in X : \left((\forall V \in Y : x \in U) \wedge (\exists V \in Y : x \in V)\right)\right) \\
\xRightarrow{A2(a)} & \left(\exists U \in X : \left(\exists V \in Y : \left(x \in U \wedge x \in V\right)\right)\right) \\
\Leftrightarrow & \left(\exists U \in X, V \in Y : \left(x \in U \wedge x \in V\right)\right)
\end{aligned}$$

Dabei benutzen die Implikationen, die mit $\star$ markiert sind, folgendes: Falls A eine *Aussage* ist, dann gibt es für einen beliebigen Definitionsbereich das *Prädikat* A, das die Variable einfach ignoriert und A zurückgibt, d.h. $A(x) = A$ für alle x im Definitionsbereich. Insbesondere gilt dann $A \Rightarrow \forall x : A$ und $\exists x : A \Rightarrow A$. (Warum gilt jeweils keine Äquivalenz?)

Aufgabe 4

(a)
- R ist *nicht* reflexiv, da $(\text{maximum}, \text{maximum}) \notin R$.
- R ist *nicht* transitiv, da es $(\text{größer}, \text{groß})$ und $(\text{groß}, \text{größtes})$ enthält, aber nicht $(\text{größer}, \text{größtes})$.
- R *ist* identitiv, da für kein Paar $m \neq n \in M$ sowohl (m,n) als auch (n,m) in R enthalten sind.
- R ist *nicht* total, da es bspw. weder $(\text{klein}, \text{maximum})$ noch $(\text{maximum}, \text{klein})$ enthält.

(b) Hier ist die Aufgabe vor allem, zu verstehen was gemeint ist. Beginnen wir mit einem beliebigen Element O: Dann enthält O R, und ist eine partielle Ordnungsrelation. Insbesondere muss O also identitiv, reflexiv und transitiv sein.

Da O reflexiv ist, muss es zusätzlich zu R noch das Element (maximum, maximum) enthalten. Da O transitiv ist, muss es zusätzlich zu R noch das Element (größer, größtes) enthalten. Wir definieren nun

$$\preccurlyeq := R \cup \big\{(\text{maximum}, \text{maximum}), (\text{größer}, \text{größtes})\big\}.$$

Dann ist $\preccurlyeq$ reflexiv, da es alle (m, m) für $m \in M$ enthält, und transitiv, da (größer, groß) und (groß, größtes) die einzige Kette von drei verschiedenen ELementen in R war, und nun (größer, größtes) in $\preccurlyeq$ enthalten ist.

Wir haben aber eben gezeigt, dass jedes O die Elemente (maximum, maximum), (größer, größtes) enthalten muss. Da es auch R enthält, gilt also: Für jedes O ist $\preccurlyeq \subseteq O$. Somit ist $\preccurlyeq$ das kleinste Element dieser Menge.

(c)
- $\preccurlyeq$ besitzt zwei maximale Elemente, nämlich "größtes" und "maximum"
- $\preccurlyeq$ besitzt kein größtes Element, da es zwei verschiedene maximale Elemente hat
- $\preccurlyeq$ besitzt drei minimale Elemente: "größer", "klein", "maximum".
- $\preccurlyeq$ besitzt kein kleinstes Element, da es drei verschiedene minimale Elemente besitzt.

(d) Eine beliebige Relation lässt sich immer durch Hinzufügen von Elementen reflexiv und transitiv machen. Das gilt allerdings nicht für identitiv: Wenn eine Relation nicht identitiv ist, ist jede Relation, in der sie enthalten ist, ebenfalls nicht identitiv. Das einfachste Beispiel lässt sich auf einer Menge mit zwei Elementen finden: Sei $M' = \{a, b\}$ und $R' = \{(a, b), (b, a)\}$. Dann ist R' nicht identitiv, also kann es nicht in einer partiellen Ordnung erhalten sein.