Abgabe: **Lineare Algebra 1** Fabian Hebestreit
2.5.2024 bis 14:00 in V3-128 **Blatt 3** Julius Frank

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Für Mengen M, N, O seien $f : M \to N$ und $g : N \to O$ Funktionen. Zeige:

(a) Die Komposition $g \circ f$ ist eine Funktion.

(b) Es gilt $f \circ \mathrm{id}_M = f = \mathrm{id}_N \circ f$.

(c) Für ein $o \in O$ ist $\mathrm{const}_o \circ f = \mathrm{const}_o$ und für ein $n \in N$ ist $g \circ \mathrm{const}_n = \mathrm{const}_{g(n)}$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Für Mengen M, N, O seien $f : M \to N$ und $g : N \to O$ Funktionen. Bearbeite entweder (a$_i$) oder (a$_s$), und in beiden Fällen (b):

(a$_i$) Zeige: Falls f und g injektiv sind, so ist auch $g \circ f$ injektiv. Falls $g \circ f$ injektiv ist, so ist auch f injektiv.

(a$_s$) Zeige: Falls f und g surjektiv sind, so ist auch $g \circ f$ surjektiv. Falls $g \circ f$ surjektiv ist, so ist auch g surjektiv.

(b) Finde ein Beispiel für Mengen M, N, O und Funktionen f und g, sodass $g \circ f$ bijektiv ist, aber f nicht surjektiv und g nicht injektiv.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Seien X, Y und Z Mengen. Konstruiere eine bijektive Funktion zwischen den Mengen $F(X \times Y, Z)$ und $F(X, F(Y, Z))$ und weise nach, dass die Funktion tatsächlich bijektiv ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Sei R eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M. Die Funktion $[-]_R : M \to M/R$, die ein Element m auf seine Äquivalenzklasse $[m]_R = \{m' \in M \mid m R m'\}$ schickt, induziert für jede Menge N eine Funktion

$$\begin{aligned} F(M/R, N) &\longrightarrow F(M, N) \\ f &\longmapsto f \circ [-]_R. \end{aligned}$$

Zeige: Diese Funktion ist injektiv, und ihr Bild besteht aus genau den Funktionen $g : M \to N$, für die gilt:

$$\forall m, m' \in M : m R m' \Rightarrow g(m) = g(m').$$

Bemerkung. Anders formuliert heißt das: Wenn eine Funktion $g : M \to N$ äquivalente Elemente identifiziert, so faktorisiert sie eindeutig durch $M \to M/R$. Eine solche eindeutige Faktorisierung wird oft mit folgendem Diagramm bebildert:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "{[-]_R}"'] & & N \\ & M/R \arrow[ur, dashed, "\exists!"'] & \end{tikzcd}$$