Aufgabe 1

(a) Die Komposition $g \circ f$ ist definiert als

$$g \circ f = \big\{(m,o) \in M \times O \mid \exists n \in N : mfn \wedge ngo.\big\} \subseteq M \times O$$

Sei $m \in M$. Da f eine Funktion ist, gibt es per Definition genau ein $n \in N$ sodass mfn, nämlich $n = f(m)$. Da g eine Funktion ist, gibt es genau ein $o \in O$, sodass ngo, nämlich $o = g(n)$. Somit gibt es für $m \in M$ genau ein $o \in O$, sodass es ein $n \in N$ gibt mit $mfn \wedge nfo$, nämlich $o = g(f(m))$: In anderen Worten, es gibt für jedes $m \in M$ genau ein $o \in O$, sodass $m(g \circ f)o$. Somit ist $g \circ f$ eine Funktion.

Bemerkung. Ein bisschen formaler zeigen wir folgendes:

$$\Big(\big(\forall m \in M \exists! n \in N : mfn\big) \wedge \big(\forall n \in N \exists! o \in O : ngo\big)\Big) \Rightarrow \Big(\forall m \in M \exists! o \in O : (\exists n \in N : mfn \wedge ngo)\Big).$$

Dies symbolisch zu beweisen ist deutlich mühsamer. Das ist bei dieser Aufgabe nicht gefragt, der Vollständigkeit halber geben wir am Ende dieses Lösungsblattes einen formalen Beweis.

(b) Sei $m \in M$. Dann ist

$$(f \circ \mathrm{id}_M)(m) = f(\mathrm{id}_M(m)) = f(m) = \mathrm{id}_N(f(m)) = (\mathrm{id}_n \circ f)(m).$$

Da die Funktionen auf allen $m \in M$ übereinstimmen, sind sie somit identisch.

(c) Sei $m \in M$. Dann ist

$$(\mathrm{const}_o \circ f)(m) = \mathrm{const}_o(f(m)) = o = \mathrm{const}_o(m),$$

sowie

$$(g \circ \mathrm{const}_n)(m) = g(\mathrm{const}_n(m)) = g(n) = \mathrm{const}_{g(n)}(m).$$

Wieder gilt: da die jeweiligen Funktionen auf jedem Element des Definitionsbereichs übereinstimmen, sind sie identisch.

Aufgabe 2

(a_i) Seien zunächst f und g injektiv. Seien $m, m' \in M$ mit $(g \circ f)(m) = (g \circ f)(m')$. Umgeschrieben heißt das, dass $g(f(m)) = g(f(m'))$. Dann gilt mit Injektivität von g, dass $f(m) = f(m')$ ist, und mit Injetkivität von f folgt $m = m'$. Damit haben wir gezeigt, dass $g \circ f$ injektiv ist.

Sei nun $g \circ f$ injektiv. Seien $m, m' \in M$ mit $f(m) = f(m')$. Dann gilt insbesondere $g(f(m)) = g(f(m')$, also $(g \circ f)(m) = (g \circ f)(m')$. Mit Injektivität von $g \circ f$ folgt $m = m'$, also ist f injektiv.

(a_s) Seien zunächst f und g surjektiv. Sei $o \in O$. Dann gibt es mit Surjektivität von g ein $n \in N$, sodass $o = g(n)$ ist. Mit Surjektivität von f gibt es dann ein $m \in M$, sodass $n = f(m)$ ist. Insgesamt gibt es also ein $m \in M$, sodass $o = g(n) = g(f(m)) = (g \circ f)(m)$ ist, also ist $g \circ f$ surjektiv.

Sei nun $g \circ f$ surjektiv und $o \in O$. Dann gibt es ein $m \in M$ mit $(g \circ f)(m) = o$. Insbesondere ist dann $g(f(m)) = o$, also gibt es mit $f(m)$ ein Element in N, das von g auf o geschickt wird. Somit ist g surjektiv.

(b) Das kleinste mögliche Beispiel ist folgendes: Seien $M = O = \{x\}$ einelementige Mengen, und $N = \{x, y\}$ eine zweielementige Menge. Sei $f : M \to N$ definiert durch $f(x) = x$, und $g : N \to O$ durch $g(x) = g(y) = x$. Dann ist $g \circ f$ eine Bijektion (nämlich die Identität auf $\{x\}$), aber f ist nicht surjektiv (da y nicht im Bild liegt) und g ist nicht injektiv (da $g(x) = g(y)$, aber $x \neq y$).

Aufgabe 3

Wir definieren Funktionen in beide Richtungen, und zeigen dass sie Umkehrfunktionen zueinander sind. Betrachte zuerst folgende Funktion:

$$\begin{aligned} \varphi : F(X \times Y, Z) &\longrightarrow F(X, F(Y,Z)) \\ (f : X \times Y \to Z) &\longmapsto \big(\varphi(f) : X \to F(Y,Z)\big), \end{aligned}$$

wobei für ein $x \in X$ die Funktion $(\varphi(f))(x) \in F(Y,Z)$ definiert ist als

$$\big(\varphi(f))(x)\big)(y) = f(x,y) \in Z.$$

Kompakter notiert können wir bei der Definition von φ auch schreiben:

$$\begin{aligned} \varphi : F(X \times Y, Z) &\longrightarrow F(X, F(Y,Z)) \\ (f : X \times Y \to Z) &\longmapsto \big(x \mapsto f(x,-)\big), \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} \varphi : F(X \times Y, Z) &\longrightarrow F(X, F(Y,Z)) \\ (f : X \times Y \to Z) &\longmapsto \big(x \mapsto (y \mapsto f(x,y))\big). \end{aligned}$$

In die andere Richtung definieren wir folgende Funktion:

$$\begin{aligned} \psi : F(X, F(Y,Z)) &\longrightarrow F(X \times Y, Z) \\ \big(g : X \to F(Y,Z)\big) &\longmapsto \big(\psi(g) : X \times Y \to Z\big), \end{aligned}$$

wobei $\psi(g)$ definiert ist durch

$$(\psi(g))(x,y) = (g(x))(y).$$

Wieder können wir kompakter schreiben:

$$\begin{aligned} \psi : F(X, F(Y,Z)) &\longrightarrow F(X \times Y, Z) \\ \big(g : X \to F(Y,Z)\big) &\longmapsto \big((x,y) \mapsto (g(x))(y)\big). \end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, dass $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{F(X\times Y,Z)}$ und $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{F(X,F(X,Y))}$ ist:

Sei zuerst $(f : X \times Y \to Z) \in F(X \times Y, Z)$: Dann ist für $x \in X$ und $y \in Y$

$$\big((\psi \circ \varphi)(f)\big)(x,y) = \big(\psi(\varphi(f))\big)(x,y) = \big(\varphi(f)(x)\big)(y) = f(x,y).$$

Da für jedes $(x,y) \in X \times Y$ $(\psi \circ \varphi)(f)$ und f übereinstimmen, sind die Funktionen gleich. Somit stimmen für jedes $f \in F(X \times Y, Z)$ die Funktionen $\psi \circ \varphi$ und $\mathrm{id}_{F(X\times Y,Z)}$ überein, also sind diese Funktionen gleich.

Sei nun $(g : X \to F(Y,Z)) \in F(X, F(Y,Z))$. Dann ist für $x \in X$ und $y \in Y$

$$\big((\varphi \circ \psi(g))(x)\big)(y) = \big((\varphi(\psi(g))(x)\big)(y) = (\psi(g))(x,y) = (g(x))(y).$$

Da für jedes $y \in Y$ $(\varphi \circ \psi(g))(x)$ und $g(x)$ übereinstimmen, sind diese Funktionen gleich. Da diese Funktionen für jedes $x \in X$ übereinstimmen, sind $\varphi \circ \psi(g)$ und g gleich. Da diese somit für jedes $g \in F(X, F(Y,Z))$ übereinstimmen, sind also $\varphi \circ \psi$ und $\mathrm{id}_{F(X,F(X,Y))}$ gleich. Insgesamt haben wir also gezeigt, dass die Funktionen φ und ψ zueinander die jeweilige Umkehrfunktion sind, also sind beides Bijektionen.

Aufgabe 4

Wir bemerken zunächst, dass die Funktion $[-]_R : M \to M/R$ surjektiv ist: Für jede Äquivalenzklasse $E \in M/R$ gilt nach Definition insbesondere, dass E eine nichtleere Teilmenge von M ist. Für ein Element $m \in E$ gilt dann, nach Konstruktion der Funktion $[-]_R$, dass $[m]_R = E$ ist. Somit ist $[-]_R$ surjektiv.

Nun folgt die Injektivität der Funktion aus der Aufgabe direkt mit einer der Charakterisierungen von Surjektivität aus der Vorlesung: In Satz 5.14 wurde gezeigt, dass $f: M \to N$ surjektiv ist genau dann, wenn für alle $g, g': N \to T$ mit $f \circ g = f \circ g'$ gilt, dass $g = g'$ ist. Umformuliert heißt das nichts anderes, als dass f surjektiv ist genau dann, wenn die Abbildung

$$\begin{aligned} F(N,T) &\longrightarrow F(M,T) \\ g &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

injektiv ist. (Diese Abbildung nennt man auch "Präkomposition" mit f, $h \mapsto f \circ h$ heißt "Postkomposition".) Die Abbildung der Aufgabe ist Präkomposition mit $[-]_R$, es folgt also insbesondere: Da $[-]_R$ surjektiv ist, ist Präkomposition mit $[-]_R$ injektiv.

Wir beschreiben nun das Bild der Abbildung: Sei $f: M/R \to N$ eine beliebige Abbildung und $m, m' \in M$ mit mRm'. Dann wollen wir zeigen, dass $(f \circ [-]_R)(m) = (f \circ [-]_R)(m')$:

$$(f \circ [-]_R)(m) = f([m]_R) = f([m']_R) = (f \circ [-]_R)(m').$$

Die mittlere Gleichheit gilt, da mRm' genau heißt, dass m und m' in derselben Äquivalenzklasse liegen, d.h. $[m]_R = [m']_R$.

Sei nun umgekehrt $g: M \to N$ eine Abbildung, für die für alle $m, m' \in M$ mit mRm' gilt, dass $g(m) = g(m')$ ist. Dann wollen wir zeigen, dass g im Bild der Präkomposition mit $[-]_R$ liegt, das heißt: Es existiert ein $\overline{g}: M/R \to N$, sodass $g = \overline{g} \circ [-]_R$. Wir definieren $\overline{g}$ als Relation:

$$\overline{g} = \{(E, n) \in M/R \times N \mid \exists m \in E : g(m) = n\} \subseteq M/R \times N$$

Dann ist $\overline{g}$ eine Funktion: Wir müssen zeigen, dass für jedes $E \in M/R$ ein $(E, n) \in \overline{g}$ existiert, und dass dieses eindeutig ist. Da E nach Definition nichtleer ist, gibt es ein $m \in E$, also ist $(E, g(m)) \in \overline{g}$ und Existenz ist bewiesen. Seien nun $n, n' \in N$, sodass (E, n) und (E, n') in $\overline{g}$ liegen. Dann gibt es $m, m' \in M$ mit $m, m' \in E$ und $g(m) = n$, $g(m') = n'$. Aber da m, m' in derselben Äquivalenzklasse liegen, ist mRm', und nach Annahme damit auch $n = g(m) = g(m') = n'$. Damit ist $(E, n) = (E, n')$, womit die Eindeutigkeit bewiesen ist. Somit ist $\overline{g}$ eine Funktion, insbesondere können wir statt $(E, n) \in \overline{g}$ also nun $\overline{g}(E) = n$ schreiben.
Zuletzt müssen wir zeigen, dass $g = \overline{g} \circ [-]_R$ ist: Für ein $m \in M$ ist $(\overline{g} \circ [-]_R)(m) = \overline{g}([m]_R)$. Aber da $m \in [m]_R$, ist $\overline{g}([m]_R) = g(m)$, also stimmen die Funktionen g und $\overline{g} \circ [-]_R$ überein.

Zum Schluss ist hier noch der formale Beweis für Aufgabe 1(a):

Lemma. *Für Prädikate P und Q in zwei Variablen gilt:*

$$\Big(\big(\forall a \exists! b : P(a,b)\big) \wedge \big(\forall b \exists! c : Q(b,c)\big)\Big) \Rightarrow \Big(\forall a \exists! c : \big(\exists b : P(a,b) \wedge Q(b,c)\big)\Big).$$

Proof. Zunächst formen wir die linke Seite um:

$$\begin{aligned}
&\Big(\big(\forall a \exists! b : P(a,b)\big) \wedge \big(\forall b \exists! c : Q(b,c)\big)\Big) \\
\Leftrightarrow &\Big(\big(\forall a : (\exists b : P(a,b)) \wedge (\forall b, b' : P(a,b) \wedge P(a,b') \Rightarrow b = b')\big) \\
&\wedge \big(\forall b : (\exists c : Q(b,c)) \wedge (\forall c, c' : Q(b,c) \wedge Q(b,c') \Rightarrow c = c')\big)\Big) \\
\Leftrightarrow &\Big(\forall a : \big(\exists b : P(a,b)\big) \wedge \big(\forall b, b' : P(a,b) \wedge P(a,b') \Rightarrow b = b'\big) \\
&\wedge \big(\forall b \exists c : Q(b,c)\big) \wedge (\forall b, c, c' : Q(b,c) \wedge Q(b,c') \Rightarrow c = c')\Big)
\end{aligned} \tag{$\star$}$$

Nun die rechte Seite:

$$\begin{aligned}
&\Big(\forall a \exists! c : \big(\exists b : P(a,b) \wedge Q(b,c)\big)\Big) \\
\Leftrightarrow &\Big(\big(\forall a \exists c : (\exists b : P(a,b) \wedge Q(b,c))\big) \wedge \big(\forall a, c, c' : (\exists b : P(a,b) \wedge Q(b,c)) \wedge (\exists b' : P(a,b') \wedge Q(b',c')) \Rightarrow c = c'\big)\Big) \\
\Leftrightarrow &\Big(\underbrace{\big(\forall a \exists b, c : P(a,b) \wedge Q(b,c)\big)}_{\text{Existenz}} \wedge \underbrace{\big(\forall a, c, c' : (\exists b, b' : P(a,b) \wedge P(a,b') \wedge Q(b,c) \wedge Q(b',c')) \Rightarrow c = c'\big)}_{\text{Eindeutigkeit}}\Big)
\end{aligned}$$

Für bessere Lesbarkeit leiten wir Existenz und Eindeutigkeit separat aus $(\star)$ her. Für die Existenz gilt

$$\begin{aligned}
&\Big(\forall a : \big(\exists b : P(a,b)\big) \wedge \big(\forall b, b' : P(a,b) \wedge P(a,b') \Rightarrow b = b'\big) \\
&\quad \wedge \big(\forall b \exists c : Q(b,c)\big) \wedge (\forall b, c, c' : Q(b,c) \wedge Q(b,c') \Rightarrow c = c')\big)\Big) \qquad (\star) \\
\Rightarrow &\Big(\forall a : \big(\exists b : P(a,b)\big) \wedge \big(\forall b \exists c : Q(b,c)\big)\Big) \\
\overset{\text{Bl.2,2}(a)}{\Longrightarrow} &\Big(\forall a \exists b : \big(P(a,b) \wedge (\exists c : Q(b,c))\big)\Big) \\
\Leftrightarrow &\Big(\forall a \exists b, c : \big(P(a,b) \wedge Q(b,c)\big)\Big).
\end{aligned}$$

Für die Eindeutigkeit gilt

$$\begin{aligned}
&\Big(\forall a : \big(\exists b : P(a,b)\big) \wedge \big(\forall b, b' : P(a,b) \wedge P(a,b') \Rightarrow b = b'\big) \\
&\quad \wedge \big(\forall b \exists c : Q(b,c)\big) \wedge (\forall b, c, c' : Q(b,c) \wedge Q(b,c') \Rightarrow c = c')\big)\Big) \qquad (\star) \\
\Longrightarrow &\Big(\forall a : \big(\forall b, b' : P(a,b) \wedge P(a,b') \Rightarrow b = b'\big) \wedge \big(\forall b, c, c' : Q(b,c) \wedge Q(b,c') \Rightarrow c = c'\big)\Big) \\
\Leftrightarrow &\Big(\forall a, b, b', c, c' : \big(P(a,b) \wedge P(a,b') \Rightarrow b = b'\big) \wedge \big(Q(b,c) \wedge Q(b,c') \Rightarrow c = c'\big)\Big) \\
\Leftrightarrow &\Big(\forall a, b, b', c, c' : \big(\neg P(a,b) \vee \neg P(a,b') \vee b = b'\big) \wedge \big(\neg Q(b,c) \vee \neg Q(b,c') \vee c = c'\big)\Big) \\
\Longrightarrow &\Big(\forall a, b, b', c, c' : \big(\neg P(a,b) \vee \neg P(a,b')\big) \vee \big(b = b' \wedge (\neg Q(b,c) \vee \neg Q(b,c') \vee c = c')\big)\Big) \\
\Leftrightarrow &\Big(\forall a, b, b', c, c' : \big(\neg P(a,b) \vee \neg P(a,b')\big) \vee \big(b = b' \wedge (\neg Q(b,c) \vee \neg Q(b',c') \vee c = c')\big)\Big) \\
\Longrightarrow &\Big(\forall a, b, b', c, c' : \big(\neg P(a,b) \vee \neg P(a,b') \vee \neg Q(b,c) \vee \neg Q(b',c') \vee c = c'\big)\Big) \\
\Leftrightarrow &\Big(\forall a, c, c' : \big(\forall b, b' : \neg(P(a,b) \wedge P(a,b') \wedge Q(b,c) \wedge Q(b',c'))\big) \vee c = c'\Big) \\
\Leftrightarrow &\Big(\forall a, c, c' : \big(\exists b, b' : P(a,b) \wedge P(a,b') \wedge Q(b,c) \wedge Q(b',c')\big) \Rightarrow c = c'\Big).
\end{aligned}$$

$\square$